

## **Tingkat Ketepatan Hasil Perhitungan Integrasi Numerik Menggunakan Bahasa Pemrograman C# Pada Metode Reimann dan Trapesium**

**Yahya<sup>1</sup>, Muhamad Sadali<sup>2</sup>, Mahpuz<sup>3</sup>**

Fakultas Teknik Universitas Hamzanwadi

ayhay7078@gmail.com<sup>1</sup>, sadali@gmail.com<sup>2</sup>, Puzuma@gmail.com<sup>3</sup>

### **Abstrak**

Integrasi numerik merupakan salah satu dari beberapa pokok bahasan dalam mata kuliah metode numerik yang diterapkan pada berbagai perguruan tinggi. Keberadaan integrasi numerik memiliki berbagai peran dalam pengambilan keputusan, khususnya dalam dalam ilmu science dan teknologi. Penerapan metode numerik, berdasarkan beberapa kajian antara lain : penyelesaian numerik pada sistem persamaan linear menggunakan metode relaksasi, Aplikasi Differensial Numerik Dalam Pengolahan Citra Digital (Application of Differential Numeric In Digital Image Processing), perbandingan metode Gauss- Legendre, Gauss-Lobatto dan Gauss-Kronrod pada integrasi numerik fungsi eksponensial, penurunan persamaan gelombang solitian dengan deret Fourier orde dua secara numerik, integrasi numerik menggunakan metode Gauss kuadratur dengan pendekatan interpolasi hermit dan polinomial legendre. Dari beberapa kajian yang telah dilakukan oleh berbagai pihak, belum ditemukan adanya pendekatan penyelesaian integrasi numerik menggunakan salah satu bahasa pemrograman seperti bahasa C++, bahasa Fortran, bahasa C# dan yang lainnya, oleh sebab itu pada penelitian ini, peneliti mengangkat permasalahan numerik, khususnya integrasi numerik menggunakan bahasa pemrograman C#. Untuk membuat penelitian menggunakan bahasa pemrograman C# tentang penyelesaian integrasi numerik, dilakukan menggunakan dua metode yaitu metode reimann dan metode trapesium. Penerapan kedua metode ini difokuskan untuk pendekatan perhitungan pada nilai analitik, kesalahan mutlak, kesalahan relatif dan tingkat akurasi perhitungan. Perhitungan tingkat akurasi menggunakan bahasa pemrograman C# (C-Sharp) terhadap metode Reimann dan Trapezoida (Trapeسيوم) untuk menghitung luas bangun di bawah kurva, menghasilkan tingkat akurasi yang tinggi (99.74%) apabila menggunakan metode reimann dan 99.49% apabila menggunakan metode trapesium) yang sangat dipengaruhi oleh jumlah segmen yang digunakan dalam perhitungan.

**Keyword :** *C#, integrasi numerik, Reimann, Trapesium*

### **Abstract**

Numerical integration is one of several subjects in the numerical method subject that is applied to various universities. The existence of numerical integration has various roles in decision making, especially in science and technology. The application of numerical methods, based on several studies, included: numerical completion of the system of linear equations using relaxation method, Numerical Differential Application in Digital Image Processing (Application of Differential Numeric In Digital Image Processing), comparison of Gauss-Legendre method, Gauss-Lobatto and Gauss- Kronrod on the numerical integration of exponential functions, decreasing the solitary wave equation with a numerical second-order Fourier series, numerical integration using the quadratic Gauss method with a hermit interpolation approach and legendary polynomials. From several studies that have been carried out by various parties, there has not been found an approach to solving numerical integration using one of the programming languages such as the C ++ language, Fortran language, C # language and others, therefore in this study, the research raised numerical problems, especially numerical integration using

the C # programming language. To make research using the C # programming language about the completion of numerical integration, it was carried out using two methods, the reimann method and the trapezoidal method. Both of these methods are applied, resulting in a calculation approach to analytic values, absolute errors, relative errors and calculation accuracy. Accuracy calculation uses C # (C-Sharp) programming language on Reimann and Trapezoida (Trapezoid) methods to calculate the area of building under the curve, resulting in high accuracy (99.74% when using the reimann method and 99.49% when using the trapezoidal method) greatly influenced by the number of segments used in the calculation.

Keyword: C #, numerical integration, Reimann, Trapezoid

## 1. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, khususnya teknologi informasi dan komunikasi, telah memberikan kita pengetahuan yang lengkap namun perlu diterjemahkan dengan realisasi dan tindakan yang kreatif dan inovatif. Salah satu tindakan kreatif dan inovatif yang dimaksud adalah kemampuan mahasiswa dalam memecahkan masalah yang rumit menggunakan bahasa-bahasa pemrograman yang telah banyak dihasilkan oleh manusia antara lain : Fortran, Pascal, Cobol, C++, Visual Basic, Delphi, C#, C#, dan lain-lain.

Mata kuliah metode numerik merupakan salah satu mata kuliah wajib yang diterapkan pada Fakultas Teknik Universitas Hamzanwadi. Materi mata kuliah metode numerik, khususnya penyelesaian integral merupakan salah satu materi dan pokok bahasan yang menurut sebagian besar mahasiswa Fakultas Teknik Universitas Hamzanwadi digolongkan ke dalam materi yang cukup sulit. Tingkat kesulitan yang dirasakan antara lain : 1. Untuk mencari luas yang diharapkan secara numerik, membutuhkan banyak segmen sesuai dengan metode reimann

dan metode trapesium . 2. Masing-masing segmen dari metode reimann dan metode trapesium dihitung luasnya sehingga membutuhkan proses pengerjaan yang berulang-ulang. 3. Ketelitian dan kejelian dalam pemecahan soal integral numerik sangat dibutuhkan<sup>[1]</sup>.

Dari beberapa kasus, penyelesaian soal-soal numerik menggunakan cara manual, disamping membutuhkan waktu pengerjaan yang cukup lama, sering tidak memberikan hasil akhir yang benar, yang disebabkan karena proses perhitungan secara manual yang cukup rumit dan pemahaman yang cukup lama mengakibatkan semangat mahasiswa untuk mengerjakan soal tersebut menjadi lemah bahkan tidak ada.

Proses pengerjaan numerik untuk penyelesaian "Integrasi Numerik" menggunakan Ms. Excel, telah membantu mahasiswa dalam memahami konsep dan algoritma yang digunakan, belum sepenuhnya memberikan jawaban yang diinginkan, walaupun tingkat kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal yang ada semakin

berkurang. Untuk menjawab permasalahan tersebut diatas, penelitian ini akan memberikan gambaran tentang bahasa pemrograman C# terhadap pemahaman konsep dan algoritma pada metode numerik untuk penyelesaian "Integrasi Numerik", khususnya metode reimann dan metode trapesium. Tolak ukur dari penyelesaian soal yang dimaksud adalah apabila menggunakan bahasa pemrograman, khususnya bahasa pemrograman C#, dilakukan dengan membandingkan tingkat akurasi atau ketepatan perhitungan waktu terhadap pengerjaan menggunakan cara manual, aplikasi Ms. Excel dan bahasa pemrograman C# dan tingkat akurasi jawaban yang dihasilkan

## **2. Tinjauan Pustaka**

### **2.1. Penelitian Terkait**

- Menurut Yulian Fauzi dalam penelitiannya "Aplikasi difrensial numerik dalam pengolahan citra digital", menjelaskan bahwa perumusan Operator Laplace menggunakan teori differensial numerik turunan kedua dengan menggunakan metode hampiran selisih-mundur (backward difference approximation) dan dalam aplikasinya dapat digunakan untuk mendeteksi tepi dari objek yang terekam dalam citra digital. Citra yang dihasilkan dari operator Laplace mampu memberikan kenampakan tepi yang cukup baik yang terdapat dalam dari citra asli (citra gedung rektorat UNIB). Tepi pada citra ditandai dengan warna yang putih dan berupa

kenampakan linier (garis) yang sangat tegas<sup>[5]</sup>.

- Menurut Randi N. Darmawan dalam penelitiannya "Perbandingan metode Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto, dan Gauss-Kronrod pada integrasi numerik fungsi eksponensial", menjelaskan Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparkan maka dapat disimpulkan bahwa metode Gauss-Legendre memiliki nilai  $\epsilon = 0.0000000316\%$ , yang berarti memiliki nilai hampiran yang akurat, mendekati nilai eksak pada fungsi eksponensial yang dimodifikasi. Metode Gauss-Kronrod memiliki nilai  $\epsilon = 3.9224773813\%$ , oleh karena metode Gauss-Kronrod menjadi metode integrasi numerik yang kurang populer untuk digunakan. Pada kasus penelitian ini, melibatkan integrasi numerik pada fungsi eksponensial yang dimodifikasi, maka dapat disimpulkan bahwa metode Gauss - Legendre lebih baik dari metode Gauss-Kronrod<sup>[6]</sup>.
- Menurut Sarwadi dalam penelitiannya "Penurunan persamaan gelombang solition dengan deret fourier orde dua secara numerik" menjelaskan bahwa 1. hasil yang diperoleh secara numerik sesuai dengan yang diharapkan baik secara Matematis dan berdasarkan sifat fisik yang harus dipenuhi. 2. makin besar energi

gelombang menghasilkan amplitudo (profil) yang tinggi<sup>[7]</sup>.

- Menurut Zainal Abidin dan Fandi Purnama dalam penelitiannya “Kesalahan Akibat Integrasi Numerik pada Sinyal Pengukuran Getaran dengan Metode Euler dan Trapesium” menjelaskan bahwa berdasarkan persamaan matematik yang dikembangkan dapat disimpulkan bahwa baik metode Euler maupun metode trapesium menghasilkan kesalahan maksimum dan kesalahan amplitudo yang semakin besar nilainya dengan bertambahnya nilai  $r$ . Selain itu, juga dapat disimpulkan bahwa kesalahan maksimum pada integrasi numerik dengan metode Euler memiliki nilai yang lebih besar dibanding dengan kesalahan maksimum pada integrasi numerik dengan metode trapesium. Sebaliknya, kesalahan amplitudo pada integrasi numerik dengan metode Euler memiliki nilai yang lebih kecil dibanding dengan kesalahan amplitudo pada integrasi numerik dengan metode trapesium<sup>[8]</sup>.

## 2.2. Landasan Teori

Landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini mencakup beberapa hal antara lain definisi aplikasi, definisi sistem, definisi metode numerik, definisi persamaan integrasi numerik, C#, framework.net, definisi kesalahan mutlak, definisi kesalahan relatif, definisi akurasi.

## 1. Definisi Aplikasi

Menurut Eka Noviansyah mengatakan bahwa aplikasi adalah penggunaan dan penerapan suatu konsep yang menjadi suatu pokok pembahasan. Aplikasi dapat diartikan juga sebagai program komputer yang dibuat untuk menolong manusia dalam melakukan tugas tertentu.

Sedangkan menurut Anisyah mengatakan bahwa aplikasi adalah penerapan, penggunaan atau penambahan. Dari pengertian di atas, dapat disimpulkan bahwa aplikasi merupakan software yang berfungsi untuk melakukan berbagai bentuk pekerjaan atau tugas-tugas tertentu seperti penerapan, penggunaan dan penambahan data.

## 2. Definisi Sistem

Menurut Jerry Fitzgerald, Ardra F. Fitzgerald dan Warren D. Stallings, Jr., mendefinisikan bahwa system itu adalah sebuah prosedur, didefinisikan “Suatu prosedur adalah urutan yang tepat dari tahapan-tahapan instruksi yang menerangkan Apa (What) yang harus dikerjakan, Siapa (Who) yang mengerjakannya, Kapan (When) dikerjakan dan Bagaimana (How) mengerjakannya.”<sup>[2]</sup>

Pengertian sistem menurut Abdul Kadir dalam buku Pengenalan Sistem Informasi, yang menyatakan bahwa “Sistem adalah sekumpulan elemen yang saling terkait atau terpadu yang dimaksudkan untuk mencapai suatu tujuan”.

Menurut Ludwig Von Bartalanfy mendefinisikan bahwa "Sistem merupakan seperangkat unsur yang saling terikat dalam suatu antar relasi diantara unsur-unsur tersebut dengan lingkungan"<sup>[3]</sup>.

### 3. Definisi Metode Numerik

Metode numerik adalah suatu teknik atau cara untuk menganalisa dan menyelesaikan masalah didalam bidang rekayasa teknik dan science dengan menggunakan operasi perhitungan matematik. Operasi perhitungan matematik didalam metode numerik biasanya dilakukan secara berulang melalui ietrasi. Apabila dilakukan secara manual, membutuhkan waktu yang cukup lama dan kemungkinan terjadinya kesalahan sangat besar karena perlu ketelitian.

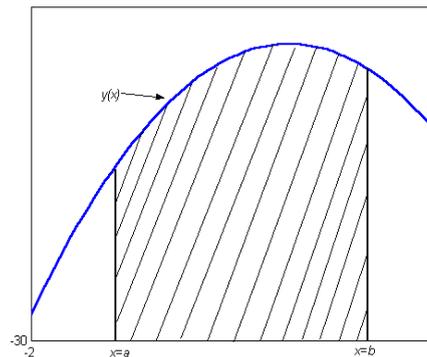
### 4. Definisi Integrasi Numerik

Integrasi numerik mengambil peranan sangat penting dalam masalah sains dan teknik, karena di dalam bidang sains sering ditemukan ungkapan-ungkapan integral matematik yang tidak mudah atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitis.

Dalam menyelesaikan persoalan integrasi numerik, dalam penelitian ini mengacu pada beberapa konsep antara lain :

1. Rumusan dasar integral.

Perhitungan luas bangun dibawah kurva :

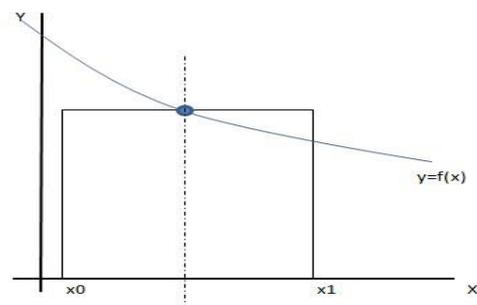


Gambar 1 : Luas =  $F(b) - F(a)$

Secara geometri, integrasi dapat diartikan dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = f(x)$ , garis  $x = a$  (batas bawah kurva) dan garis  $x = b$  (batas atas kurva).

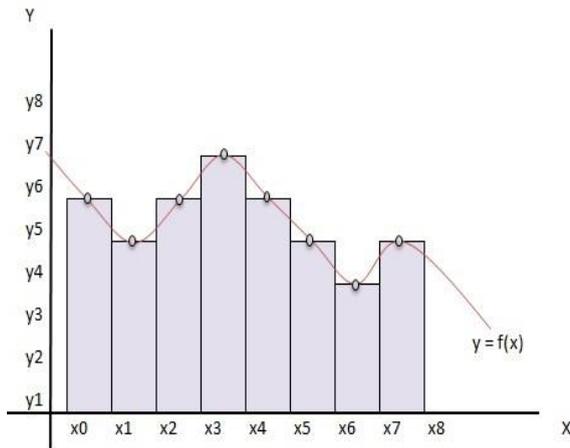
2. Metode Reimann (metode titik tengah)  
 Metode mengambil nilai titik tengah dari masing-masing segmen dalam proses perhitungan numerik.

- 1 segmen



Gambar 2 : 1 Segmen

- n segmen



Gambar 3 : n Segmen

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

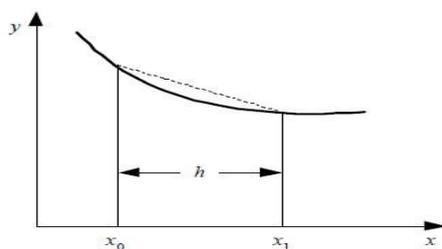
$$\approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\approx \frac{h}{2} (f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) \quad (P.6.11)$$

Gambar 4 : Formulasi metode Reimann

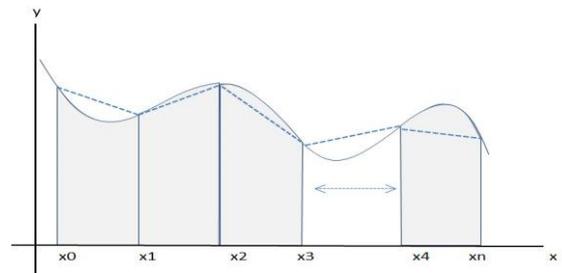
### 3. Metode Trapesium

- 1 segmen



Gambar 5 : Trapesium 1 segmen

- n segmen



Gambar 6 : Trapesium n segmen

### 5. C-Sharp (C#)

C# merupakan salah satu aplikasi yang memiliki kemampuan dalam penguatan Framework.NET. C# dibuat sejalan dengan perkembangan Framework. NET, C# sendiri dikembangkan oleh Microsoft. Dalam penerapannya C-Sharp (C#) menjanjikan produktifitas, fleksibilitas serta kemudahan yang ada dari aplikasi sebelumnya yaitu Visual Basic, C# dan C++. C# mengadopsi kemampuan dari pegabungan aplikasi sebelumnya (mempelajari-c)

Microsoft membuat C# seiring dengan pembuatan Framework.NET. Chief Architect dalam pembuatan C# adalah Anders Hejlsberg yang sebelumnya berperan dalam pembuatan Borland Delphi dan Turbo Pascal. C# menjanjikan produktifitas dan kemudahan yang ada di Visual Basic dengan kemampuan dan fleksibilitas yang ada di C/C++.

Menurut spesifikasi bahasanya, "C# (pronounced "C Sharp") is a simple, modern, object oriented, and type-safe programming language. It will immediately be familiar to C and C++ programmers. C# combines the high productivity of Rapid Application Development (RAD) languages and the raw power of C++."

Untuk mencapai produktifitas tinggi ini konsep-konsep sulit C++ disederhanakan dan fitur-fitur baru ditambahkan. Hal ini mungkin terasa mirip dengan C#, karena itulah C# bisa dianggap sebagai sepupu C#[4].

## **6. Framework.NET**

Sama halnya dengan C-Sharp (C#), Framework.NET dikembangkan oleh microsoft dalam rentang tahun sekitar 2001 sampai dengan 2002. Framework.NET merupakan pengembangan dari DOS dan WIN 32 yang sebelumnya dibuat oleh Microsoft. Timbulnya permasalahan yang dihadapi dalam dunia pemrograman, mendorong aktifitas pengembangan program yang mampu mengatasi permasalahan secara tepat dan mudah. Framework.NET merupakan salah satu program yang memiliki konsep perangkat lunak yang kuat berupa Common Language Runtime (CLR) dan class library .NET. (mempelajari-c)

## **7. Definisi Efisiensi**

Efisiensi didefinisikan oleh beberapa ahli dengan bahasa dan sudut pandang yang berbeda-beda. Menurut beberapa ahli efisiensi didefinisikan sebagai berikut :

- Pengertian efisiensi menurut Mulyamah berpendapat bahwa : “Efisiensi merupakan suatu ukuran dalam membandingkan rencana penggunaan masukan dengan penggunaan yang direalisasikan atau

perkataan lain penggunaan yang sebenarnya”

- Sedangkan pengertian efisiensi menurut SP. Hasibuan yang mengutip pernyataan H. Emerson adalah “Efisiensi adalah perbandingan yang terbaik antara input (masukan) dan output (hasil antara keuntungan dengan sumber-sumber yang dipergunakan), seperti halnya juga hasil optimal yang dicapai dengan penggunaan sumber yang terbatas. Dengan kata lain hubungan antara apa yang telah diselesaikan”.

## **8. Definisi Akurasi**

Akurasi dapat diartikan dalam beberapa istilah antara lain : teliti dalam perhitungan, tepat dalam memilih metode dan cara perhitungan, cermat dalam mengambil keputusan, seksama dalam pengerjaan, akurat dalam pengambilan keputusan. Disisi lain akurasi dapat diartikan sebagai derajat kebebasan informasi dari kesalahan, bebas dari kesalahan dan tidak bias atau menyesatkan.

Dalam penelitian ini, akurasi diartikan sebagai ketepatan dalam perhitungan integrasi numerik, yang dijadikan sebagai prosentase hasil perhitungan untuk mendekati nilai sebenarnya yang diperoleh dari hasil perhitungan analitik.

### **3. Metodologi Penelitian**

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

Untuk mencapai tujuan yang diinginkan dalam penelitian, dilakukan beberapa tahapan penelitian antara lain :

- Penentuan soal integral  
Sampel soal integral yang digunakan untuk pengambilan data dalam penelitian sebanyak 4 soal, diterapkan pada 2 metode (Reimann dan Trapezoida) yang bervariasi dan dengan menggunakan 2 segmen dari tiap soal.
- Proses pengambilan data.  
Pengambilan data dari 4 soal, dilakukan menggunakan dua metode yaitu metode reimann dan metode trapesium. Masing-masing metode akan mencakup hasil perhitungan terhadap komponen-komponen perhitungan antara lain : nilai analitik, nilai numerik, kesalahan mutlak, kesalahan relatif (laju error), dan tingkat akurasi.
- Rekapitulasi data  
Data yang diperoleh dari proses pengerjaan soal-soal, baik secara analitik dan numerik. Data dikumpulkan sesuai dengan tahapan-tahapan yaitu tahapan manual yang digunakan untuk menentukan nilai analitik, tahapan excel dan tahapan aplikasi/bahasa pemrograman C#.
- Pengolahan Data  
Pengolahan data yang diperoleh dari tahapan-tahapan sebelumnya, dilakukan menggunakan aplikasi excel untuk melakukan pemetaan serta mengetahui pengaruh bahasa

pemrograman C# dalam ketepatan perhitungan integrasi numerik.

- Analisa Data  
Analisa data dari hasil perhitungan integrasi numerik menggunakan bahasa pemrograman C#, dilakukan untuk mengetahui tingkat pendekatan perhitungan yang dihasilkan.
- Penarikan kesimpulan  
Penarikan kesimpulan dilakukan berdasarkan hasil proses pengolahan dan analisa data. Hal ini penting dilakukan untuk menentukan langkah selanjutnya yang perlu dilakukan dan sebagai bahan referensi pada penelitian berikutnya dengan menggunakan bahasa pemrograman yang berbeda.

#### **3.2 Lokasi Penelitian**

Penelitian ini dilakukan pada Fakultas Teknik Universitas Hamzanwadi, Jl. Prof. Moh. Yamin No. 35 Selong - Lombok Timur – Nusa Tenggara Barat

#### **3.3 Pengumpulan Bahan**

Alat dan bahan yang digunakan dalam penelitian ini antara lain : kertas soal yang berisi minimal 4 contoh soal, Personal Computer atau Laptop yang digunakan untuk mengerjakan soal dan membuat aplikasi, DVDRW sebagai tempat penyimpanan data dan aplikasi yang telah selesai. dengan mengambil

beberapa sampel soal sebagai bahan uji coba aplikasi yang dibuat.

#### 4. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pengujian	Soal	Metode	Jumlah Segmen	Akurasi
1	$f(x) = 2x^2 + 5x + 6$	Reimann	10	99.94%
			20	99.98%
		Trapeسيوم	10	99.87%
			20	99.97%
Rata-rata				99.94%
2	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$	Reimann	10	99.75%
			20	99.94%
		Trapeسيوم	10	99.50%
			20	99.88%
Rata-rata				99.77%
3	$f(x) = \sin(x)$	Reimann	10	99.31%
			20	99.82%
		Trapeسيوم	10	98.66%
			20	99.67%
Rata-rata				99.37%
4	$f(x) = 2\cos(x)$	Reimann	10	99.33%
			20	99.83%
		Trapeسيوم	10	98.66%
			20	99.67%
Rata-rata				99.37%
Rata-rata keseluruhan (Metode Reimann)				99.74%
Rata-rata keseluruhan (Metode Trapezium)				99.49%

#### 5. Kesimpulan

Penelitian yang telah dilakukan, setelah dilakukan proses penelitian melalui tahapan-tahapan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat diambil beberapa kesimpulan dan saran antara lain :

- Perhitungan tingkat akurasi menggunakan bahasa pemrograman C# (C-Sharp) terhadap metode Reimann dan Trapezoida (Trapeسيوم) untuk menghitung luas bangun di bawah kurva, menghasilkan tingkat akurasi yang tinggi (99.74%) apabila menggunakan metode reimann dan 99.49% apabila

menggunakan metode trapesium) yang sangat dipengaruhi oleh jumlah segmen yang digunakan dalam perhitungan.

- Hasil analisa yang dilakukan, memberikan gambaran bahwa semakin banyak segmen yang digunakan, maka tingkat akurasi yang dihasilkan semakin besar.
- Bahasa pemrograman C# (C-Sharp) dapat dijadikan sebagai salah satu alternatif tool dalam penyelesaian masalah integrasi numerik.

#### 6. Daftar Pustaka

- [1] B. A. B. III and I. Numerik, "Bab III integrasi numerik," pp. 46–79. 2013
- [2] P. Sistem, D. Sistem, M. J. Fitzgerald, and A. F. Fitzgerald, "Apa itu Subsistem ? Apa itu Supersistem ?," pp. 1–28. 2015
- [3] D. Sistem, "Pengertian sistem dan analisis sistem 1.," pp. 1–9. 2014
- [4] A. Rachmatullah, "Mempelajari C#: Bahasa Pemrograman Modern Daftar Isi Singkat," 2002.
- [5] Y. Fauzi, J. Matematika, F. Matematika, P. Alam, and U. Bengkulu, "Aplikasi Differensial Numerik Dalam Pengolahan Citra Digital ( Application of Differential Numeric In Digital Image Processing )," vol. 3, no. 2, pp. 282–285, 2007.
- [6] P. M. Gauss-legendre and G. D. A. N. G.-K. Pada, "Perbandingan metode gauss-legendre, gauss-lobatto dan gauss- kronrod pada integrasi numerik fungsi eksponensial (," vol. I, no. 2, pp. 99–108, 2016
- [7] D. Deret, F. Orde, and D. U. A. Secara, "Penurunan persamaan gelombang soliton dengan deret fourier orde dua secara numerik," no. 1994, pp. 128–138, 1996.

- [8] Zainal Abidin and Fandi Purnama, "Kesalahan Akibat Integrasi Numerik pada Sinyal Pengukuran Getaran dengan Metode Euler dan Trapesium," J. Tek. Mesin, vol. 11, no. 1, pp. 19–24, 2009.