

Solusi Persamaan Dirac Untuk Potensial Manning Rosen Hyperbolik Plus Potensial Tensor Tipe Coulomb Pada Pseudospin Simetri Menggunakan Polynomial Romanovski

Kholida Ismatulloh^{1*}, Yosi Nur Kholisho², Baiq Desi Dwi Arianti³

^{1,2,3}Prodi Pendidikan Informatika, FMIPA, Universitas Hamzanwadi, Selong, Indonesia

Received: 20 November 2024

Revised: 17 December 2024

Accepted: 27 December 2024

Corresponding Author:

Kholida Ismatulloh

kholida.ebtaryadi@gmail.com

© 2024 Kappa Journal is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



DOI:

<https://doi.org/10.29408/kpj.v8i3.28217>

Abstract: The relativistic energy and wave function for the hyperbolic Manning Rosen potential with Coulomb-type tensor potential in the case of pseudospin symmetry are obtained from solving the Dirac equation using the Romanovski polynomial method. Using the appropriate wave function and variable substitution to reduce the second-order differential equation to a hypergeometric-type equation, the Dirac equation can be solved using Romanovski polynomials. The relativistic energy equation and weight function for Romanovski polynomials are produced by comparing the standard differential and hypergeometric type equations. Relativistic energy can be determined by employing numerical techniques and Matlab software to solve the relativistic energy equation. The weight function yields the relativistic wave function, which is then represented for the lower component of Dirac spin in the form of Romanovski polynomials.

Keywords: Dirac equation; Hyperbolic Rosen Manning potential; Coulomb-type tensor potential; Romanovski polynomials; Pseudospin Symmetry

Pendahuluan

Mekanika kuantum sudah lama dikenal sebagai “ilmu dasar” bagi penelaahan gejala dan sifat berbagai sistem mikroskopik. Perkembangan mekanika kuantum berakar dari konsep dasar teori kuantum yang meliputi dugaan-dugaan sementara baik secara diskrit maupun ketidakteraturan. Teori mekanika kuantum khususnya tentang orbital kuantum merupakan ilmu dasar yang digunakan untuk menjelaskan sifat-sifat material secara mikroskopik (Tjia & Sutjahja, 2012).

Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) melanjutkan permasalahan persamaan Klein-Gordon sebelumnya mengenai penyusunan persamaan gelombang yang baru. Dirac mencoba merumuskan suatu persamaan gelombang dengan mensyaratkan persamaan linear dalam (persamaan diferensial orde pertama terhadap waktu) sehingga nilai

peluangnya mutlak positif. Kemudian persamaan itu juga harus memenuhi kaitan dengan energi momentum relativistik sehingga komponen (fungsi gelombang) harus memenuhi persamaan Klein-Gordon (Chabab et al., 2012)

Persamaan Dirac mulai dikenal setelah persamaan Klein-Gordon tidak dapat diterima oleh kalangan masyarakat setempat. Dalam penemuannya Klein-Gordon menggunakan spin bola untuk menyelesaikan persamaannya sehingga menghasilkan fungsi gelombang pada gerak partikel akibat adanya pengaruh relativistik sehingga menyebabkan partikel tersebut berpindah dalam medan potensial. Sedangkan Dirac menggunakan spin $\frac{1}{2}$ (pecahan) dalam menyelesaikan persamaan fungsi gelombang pada gerak partikel tersebut, contohnya pada spin elektron (Greiner, 2011).

How to Cite:

Ismatulloh, K., Kholisho, Y. N., & Arianti, B. D. D. (2024). Solusi Persamaan Dirac Untuk Potensial Manning Rosen Hyperbolik Plus Potensial Tensor Tipe Coulomb Pada Pseudospin Simetri Menggunakan Polynomial Romanovski. *Kappa Journal*, 8(3), 485-494. <https://doi.org/10.29408/kpj.v8i3.28217>

Pada tahun 1884 Sir E. J. Routh merumuskan metode ini dan pada tahun 1929 dikembangkan kembali oleh V. I. Romanovski yang kemudian dikenal dalam beberapa literatur matematika sebagai polinomial "Romanovski" (Yanuarief, 2012). Polinomial Romanovski merupakan metode tradisional yang dapat merubah persamaan Dirac menjadi persamaan tipe Hipergeometri melalui substitusi variabel dan fungsi gelombang. Polinomial Romanovski pada awalnya diusulkan oleh E.J Routh dan 45 tahun kemudian dikaji ulang oleh V.I Romanovski. Penerapan polinomial Romanovski dapat dilakukan dengan menggunakan formula (Weber, 2007).

Polinomial Romanovski belum banyak diaplikasikan untuk penyelesaian persamaan yang mirip dengan persamaan Schrodinger. Oleh karenanya langkah-langkah yang digunakanpun mirip dengan metode hipergeometri namun fungsi gelombangnya diperoleh dari formula Rodrigues dalam bentuk polinomial Romanovski (Alvarez-Castillo, 2008). Faktor yang menguntungkan adalah adanya pola penyelesaian seperti pada metode hipergeometri, dimana metode hipergeometri merupakan penyelesaian persamaan yang mempunyai bentuk penyelesaian paling umum. Dengan demikian persamaan differensial fungsi yang lain salah satunya polinomial Romanovski dapat direduksi menjadi persamaan differensial hipergeometri, sehingga penyelesaiannya lebih mudah dipahami dengan pola yang teratur dan lebih sederhana dari differensial hipergeometri.

Berdasarkan penelitian yang telah lebih dahulu dilakukan oleh M. Hamzavi, (Falaye & Ikhdair, 2013), maka dilakukan penelitian lanjutan mengenai solusi persamaan Dirac pada potensial Scarf dengan potensial baru Coupling tensor untuk pseudospin simetri menggunakan metode polinomial Romanovski (Cari et al., 2013).

Metode

Persamaan Schrödinger relativistik disebut sebagai persamaan Klein-Gordon untuk spin bilangan bulat dan persamaan Dirac untuk spin 1/2. Deskripsi secara kuantitatif gerak partikel relativistik yang dipengaruhi oleh gaya medan yang direpresentasikan sebagai energy potensial partikel yang berspin 1/2 tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial yang disebut sebagai persamaan Dirac,

$$\alpha \cdot p + (\beta(M + Vsr)) - i\beta\alpha \cdot (r)\psi_{r=E} = \quad (1)$$

dengan M adalah massa partikel, di dalam potensial vektor yang menolak $Vv(r)$, potensial skalar $Vs(r)$ bergerak, dan potensial tensor kopling $U(r)$, E adalah energi relativistik dan p merupakan operator momentum linear tiga dimensi $-i\nabla$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (2)$$

σ adalah matriks Pauli tiga dimensi, I adalah matriks identitas 2×2 . Potensial vektor dan scalar merupakan potensial bola simetrik yang tidak hanya bergantung pada posisi radial saja, $r = \bar{r}$ dan di sini kita gunakan $\hbar = 1$ dan $c = 1$. Dengan menuliskan fungsi gelombang spin Dirac sebagai berikut,

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \zeta(r) \\ \varphi(r) \end{pmatrix} \psi(\bar{r}) = \begin{pmatrix} F_{nk}(\bar{r}) \\ G_{nk}(\bar{r}) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F_{nk}(r) Y_{jm}^l(\theta, \varphi) \\ i G_{nk}(r) Y_{jm}^l(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (3)$$

dengan $\zeta(r)$ adalah spin Dirac komponen atas dan φ adalah spin Dirac komponen bawah, $Y_{jm}^l(\theta, \varphi)$ adalah spin bola harmonik, $Y_{jm}^l(\theta, \varphi)$, φ adalah pseudospin bola harmonik, l adalah bilangan kuantum orbital biasa, bilangan kuantum pseudo-orbital, m adalah proyeksi momentum sudut pada sumbu z . Dengan memasukkan persamaan (2) dan (3) ke dalam persamaan (1) diperoleh l diperoleh

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} - U(r) \right) F_{nk}(r) = (M + E_{nk} - \Delta(r)) G_{nk}(r), \quad (4)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + U(r) \right) G_{nk}(r) = (M - E_{nk} + \Sigma(r)) F_{nk}(r), \quad (5)$$

$F_{nk}(r)$ merupakan spin Dirac komponen atas dan $G_{nk}(r)$ adalah spin Dirac komponen bawah, sehingga didapatkan persamaan spin simetri dan pseudospin simetri yang masing-masing dapat dituliskan untuk spin simetri.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} + \frac{2\kappa}{r} U(r) - \frac{dU(r)}{dr} - U^2(r) \right] F_{nk}(r) + \frac{\frac{d\Delta(r)}{dr}}{M+E_{nk}-\Delta(r)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} - U(r) \right) F_{nk}(r) = [(M + E_{nk} - \Delta(r))(M - E_{nk} + \Sigma(r))] F_{nk}(r), \quad (6)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} + \frac{2\kappa}{r} U(r) + \frac{dU(r)}{dr} - U^2(r) \right] G_{nk}(r) + \frac{\frac{d\Sigma(r)}{dr}}{M+E_{nk}-\Sigma(r)} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + U(r) \right) G_{nk}(r) = [(M + E_{nk} - \Delta(r))(M - E_{nk} + \Sigma(r))] G_{nk}(r), \quad (7)$$

dimana $\kappa(\kappa - 1) = \tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ dan $\kappa(\kappa + 1) = l(l + 1)$. κ adalah bialangan kuantum spin orbital, l adalah bilangan kuantum orbital dan \tilde{l} bilangan kuantum pseudospin simetri adalah, Untuk spin simetri $\Delta r = C$ dan $S(r)$ merupakan potensial yang memengaruhi sistem, sedangkan untuk pseudospin simetri nilai $\Sigma r = C$ dan Δr merupakan potensial yang memengaruhi sistem.

Dengan substitusi variabel yang sesuai dan dengan menggunakan fungsi gelombang baru pada persamaan tipe Schrödinger maka diperoleh persamaan tipe hipergeometri yang secara umum dinyatakan sebagai

$$\sigma(s) \frac{\partial^2 y_n(s)}{\partial s^2} + \tau(s) \frac{\partial y_n(s)}{\partial s} + \lambda_n y_n(s) = 0 \quad (8)$$

Dimana $\sigma(s) = as^2 + bs + c$; $\tau = ds + e$ dan $\lambda_n = -(n(n-1) + 2n(1-p))$ (9)

Pada Polynomial Romanovski parameternya untuk persamaan (8) dan (9) adalah

$$a = 1, b = 0, c = 1, d = 2(1-p), \text{ dan } e = q, p > 0 \quad (10)$$

Dengan memasukkan persamaan (9) dan (10) di persamaan (8) diperoleh persamaan diferensial Romanovski,

$$(1 + s^2) \frac{d^2 R_n^{(p,q)}(s)}{ds^2} + (2s(1-p) + q) \frac{dR_n^{(p,q)}(s)}{ds} - \{n(n-1) + 2n(1-p)\} R_n^{(p,q)}(s) = 0 \quad (11)$$

Polinomial Romanovski $R_n^{(p,q)}(s)$ dibangun berdasarkan fungsi $w(x)$ yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Pearson

$$\frac{d}{dx} (\sigma(x)w(x)) = \tau(x)w(x) \quad (12)$$

Bila persamaan (9) dimasukkan ke persamaan (12), diperoleh fungsi bobot untuk persamaan (11) yaitu

$$w(s) = (1 + s^2)^{-p} e^{q \tan^{-1}(s)} = (1 + s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} \quad (13)$$

Polynomial Romanovski memenuhi syarat bahwa nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^{(p,q)} R_m^{(p,q)}(s) R_n^{(p,q)}(s) ds \quad (14)$$

Konvergen jika dan hanya jika $m' = m < 2p - 1$. maka bentuk penyelesaian umum dari

$$R_m^{(p,q)}(s) \rightarrow R_n^{(-\beta, -\alpha)}(s) \\ R_n^{(-\beta, -\alpha)}(s) = \frac{1}{(1+s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} a_n^\beta} \left\{ (1 + s^2)^{-\frac{p}{2}} e^{\frac{q}{2} \tan^{-1}(s)} D_n^{(\beta, \alpha)}(s) \right\} \quad (15)$$

Persamaan (8) dapat direduksi menjadi persamaan (11) bila penyelesaian persamaan sebanding dengan fungsi bobot dan dikalikan dengan suatu fungsi baru, yaitu

$$w(s) = g_n(s) = (1 + s^2)^{-p} e^{q \tan^{-1}(s)} = (1 + s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} D_n^{(\beta, \alpha)}(s) = R_n^{(p,q)}(s) \quad (16)$$

Dengan $D_n^{(p,q)}$ adalah polinomial Romanovski. Fungsi gelombang untuk polynomial Romanovski yaitu

$$\chi(r) = g_n(s) = (1 + s^2)^{-\frac{p}{2}} e^{\frac{q}{2} \tan^{-1}(s)} D_n^{(\beta, \alpha)}(s) \quad (17)$$

Hasil dan Pembahasan

A. Solusi Persamaan Dirac untuk Potensial Manning Rosen Hiperbolik dengan Potensial Tensor Tipe Coulomb untuk Kasus Pseudospin Simetri Menggunakan persamaan (6), dan memasukkan potensial (Σ) yang mempengaruhi

$$\Sigma(r) = c^2 \left\{ \left(\frac{v(v-1)}{\sinh^2 cr} - 2\mu \coth cr \right) \right\} \quad (18)$$

dan U merupakan potensial tensor tipe Coulomb

$$U(r) = -\frac{H}{r} \quad (19)$$

dengan pendekatan Greene R, and Aldrich [19] sebagai berikut,

$$\frac{1}{r^2} \cong \frac{c^2}{\sinh^2 cr}$$

Maka didapatkan

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(\kappa(\kappa-1) + 2\kappa H + H^2 - H + v(v-1)(M - E_{nk} + C_{ps}))c^2}{\sinh^2 cr} \right\} G_{nk}(r) - (2\mu \coth(cr))(M - E_{nk} + C_{ps})G_{nk}(r) = (M + E_{nk})(M - E_{nk} + C_{ps})G_{nk}(r) \quad (20)$$

Dimana

$$A_{ps} = (\kappa + H - 1)(\kappa + H) + v(v-1)(M - E_{nk} + C_{ps}) \quad (21a)$$

$$B_{ps} = \frac{2\mu}{c^2} (M - E_{nk} + C_{ps}) \quad (21b)$$

$$E'_{ps} = -\frac{(M + E_{nk})(M - E_{nk} + C_{ps})}{c^2} \quad (21c)$$

Maka persamaan (20) dapat dituliskan menjadi:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{c^2 A_{ps}}{\sinh^2(cr)} - c^2 B_{ps} \coth(cr) - c^2 E'_{ps} \right\} G_{nk}(r) = 0 \quad (22)$$

Persamaan (22) dapat dirubah menjadi persamaan diferensial orde dua tipe hipergeometri dengan melakukan substitusi variabel yang sesuai, yaitu

$$\coth cr \quad cr = is \quad (23a)$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{d(\coth(cr))}{dr} = ic \operatorname{csch}^2(cr)$$

$$ds = ic \operatorname{csch}^2(cr) dr$$

$$\coth^2(cr) - 1 = \operatorname{csch}^2(cr)$$

$$(is)^2 - 1 = \operatorname{csch}^2(cr)$$

$$(-s^2 - 1) = \operatorname{csch}^2(cr)$$

$$-(1 + s^2) = \operatorname{csch}^2(cr) \quad (23b)$$

Sehingga,

$$\frac{d}{dr} = -ic(1 + s^2) \frac{d}{ds}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = -ic(1 + s^2) \frac{d}{ds} \left\{ -ic(1 + s^2) \frac{d}{ds} \right\}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = -c^2(1 + s^2)^2 \frac{d^2}{ds^2} - 2sc^2(1 + s^2) \frac{d}{ds} \quad (23c)$$

Persamaan (23a) akan digunakan untuk menentukan fungsi gelombang bagian radial. Untuk mendapatkan persamaan fungsi hipergeometri perantara maka dilakukan substitusi persamaan (23a), (23b), dan (23c) ke dalam persamaan (22) sehingga diperoleh,

$$-c^2(1 + s^2)^2 \frac{d^2 G_{nk}}{ds^2} - 2sc^2(1 + s^2) \frac{dG_{nk}}{ds} - c^2 \{A_{ps} - (1 + s^2) + B_{ps} is + E_{ps}\} G_{nk}(r) = 0 \quad (24)$$

Persamaan (24) dibagi dengan $-c^2(1 + s^2)$ sehingga

$$(1 + s^2) \frac{d^2 G_{nk}}{ds^2} + 2s \frac{dG_{nk}}{ds} - \left\{ A_{ps} - \frac{B_{ps} is}{(1+s^2)} - \frac{E_{ps}}{(1+s^2)} \right\} G_{nk}(r) = 0 \quad (25)$$

Persamaan (25) merupakan persamaan hipergeometri perantara. Maka penyelesaiannya dengan mensubstitusi Persamaan (13) ke dalam Persamaan (24) yang selanjutnya dijelaskan dalam Lampiran 3, dengan hasil yang diperoleh seperti ditunjukkan pada Persamaan (26),

$$(1 + s^2) \frac{\partial^2 G_{nk}^{(-\beta, -\alpha)}(s)}{\partial s^2} + (2s(\beta + 1) - \alpha) \frac{\partial G_{nk}^{(-\beta, -\alpha)}(s)}{\partial s} + \left[\frac{-\beta\alpha s + \frac{\alpha^2}{4} - \beta^2 + B_{ps}i + E_{ps}}{(1+s^2)} + \beta^2 + \beta - A_{ps} \right] D_n^{(-\beta, -\alpha)}(s) = 0 \quad (26)$$

Persamaan (26) dapat dibuat menjadi bentuk persamaan diferensial orde dua tipe polinomial Romanovski, dengan membuat suku yang berpenyebut $(1 + s^2)$ sama dengan nol, sehingga berlaku hubungan, $-\beta\alpha + B_{ps}i = 0$ (27a)

$$\frac{\alpha^2}{4} - \beta^2 + E_{ps} = 0 \quad (27b)$$

Sehingga persamaan (26) menjadi,

$$(1 + s^2) \frac{\partial^2 G_{nk}}{\partial s^2} + (2s(\beta + 1) - \alpha) \frac{\partial G_{nk}}{\partial s} - [A_{ps} - \beta^2 - \beta] D_n^{(-\beta, -\alpha)}(s) = 0 \quad (28)$$

Dengan membandingkan antara parameter pada Persamaan (12) dan (28), kita dapatkan hubungan sebagai berikut

$$A_{ps} - \beta^2 - \beta = n(n - 1) + 2n(1 - p); \quad (29)$$

$$2(\beta + 1) = 2(-p + 1) \text{ dan } \alpha = -q'$$

Dari Persamaan (29), kita mempunyai syarat $p = -\beta$; maka $p > 0$, sehingga nilai β dapat diperoleh dari persamaan (30),

$$A_{ps} - \beta^2 - \beta = n(n - 1) + 2n(1 - p)$$

$$A_{ps} - \left[\beta + \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{1}{4} = n(n - 1) + 2n(1 + \beta)$$

$$A_{ps} + \frac{1}{4} = n^2 - n + 2n + 2n(1 + \beta) + \left(\beta + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$A_{ps} + \frac{1}{4} = n^2 - n + 2n + 2n\beta + \left(\beta + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$A_{ps} + \frac{1}{4} = n^2 + 2n \left(\beta + \frac{1}{2} \right) + \left(\beta + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$A_{ps} + \frac{1}{4} = \left(n + \beta + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\sqrt{A_{ps} + \frac{1}{4}} = \left(n + \beta + \frac{1}{2} \right)$$

$$\beta = \beta_n = \sqrt{A_{ps} + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2} =$$

$$\sqrt{(\kappa + H - 1)(\kappa + H) + v(v - 1)(M - E_{nk} + C_{ps}) + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2} \quad (30)$$

dengan menggunakan Persamaan (27a) dan (30) didapatkan nilai α sebagai berikut,

$$\alpha = \frac{B_{ps}i}{\beta} = \frac{2\mu(M - E_{nk} + C_{ps})i}{\sqrt{(\kappa + H - 1)(\kappa + H) + v(v - 1)(M - E_{nk} + C_{ps}) + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2}} = \frac{-2\mu(M - E_{nk} + C_{ps})}{\sqrt{(\kappa + H - 1)(\kappa + H) + v(v - 1)(M - E_{nk} + C_{ps}) + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2}} \quad (31)$$

Nilai α dan β yang diperoleh dari persamaan di atas yang nantinya akan digunakan untuk membuat visualisasi fungsi gelombang radial untuk potensial Manning Rosen Hiperbolik plus potensial tensor tipe

Coulomb yang dikombinasikan dengan Persamaan (13), (14), (16), dan (27a). Nilai energi diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (30) ke dalam Persamaan (27b), sehingga diperoleh persamaan dibawah ini,

$$(M - E_{nk} + C_{ps})(M + E_{nk}) = - \left\{ \frac{c^2}{4} \left(\frac{-2\mu(M - E_{nk} + C_{ps})}{\sqrt{(\kappa + H - 1)(\kappa + H) + v(v - 1)(M - E_{nk} + C_{ps}) + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2}} \right)^2 + c^2 \left(\sqrt{(\kappa + H - 1)(\kappa + H) + v(v - 1)(M - E_{nk} + C_{ps}) + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \quad (32)$$

Persamaan (32) ini nantinya akan digunakan untuk menentukan nilai energi relativistik dari persamaan Dirac pada potensial Manning Rosen Hiperbolik plus potensial tensor tipe Coulomb. Dimana nilai energi relativistiknya dihitung menggunakan software Matlab 2011 dengan memvariasikan nilai faktor pengganggu (κ, H) dan bilangan kuantum utama (n) yang hasil akhirnya divisualisasikan dalam bentuk grafik. Bilangan kuantum utama (n) yang divariasikan menunjukkan probabilitas atau peluang ditemukannya electron.

Persamaan (32) merupakan solusi tingkat-tingkat energi pada Persamaan Dirac pada potensial Manning Rosen Hiperbolik plus potensial Tensor tipe Coulomb, dimana parameter yang digunakan adalah c yang merupakan faktor sentrifugal, v dan μ adalah konstanta yang berasal dari potensial Manning Rosen Hiperbolik dengan nilainya konstan, bilangan kuantum spin orbital (κ), potensial tensor (H) dan n menunjukkan bilangan kuantum utama ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

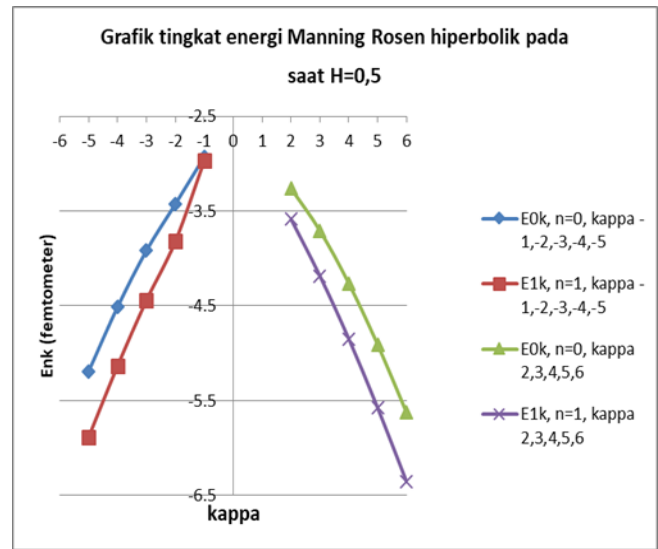
Dari Persamaan (32) dapat dihitung nilai energi secara numerik dengan menggunakan software Matlab 2011. Perhitungan dengan numerik dilakukan karena nilai energi pada Persamaan (32) tidak dapat diselesaikan secara analitik, hal tersebut disebabkan karena Persamaan (32) mempunyai derajat polinomial yang tinggi yang menyebabkan penyelesaiannya akan sulit terselesaikan apabila diselesaikan dengan metode analitik.

Perhitungan secara numerik dilakukan dengan merubah nilai parameter-parameter yang terdapat di dalam Persamaan (32), baik itu parameter yang berasal dari potensial Manning Rosen Hiperbolik, potensial Tensor tipe Coulomb maupun parameter diluar potensial tersebut. Hasil perhitungan energi relativistik yang diperoleh pada kasus Pseudospin simetri selalu bernilai negatif untuk semua potensial namun pada penelitian ini peneliti menggunakan potensial Manning Rosen Hiperbolik plus potensial Tensor tipe Coulomb yang dapat dilihat pada Tabel 1,

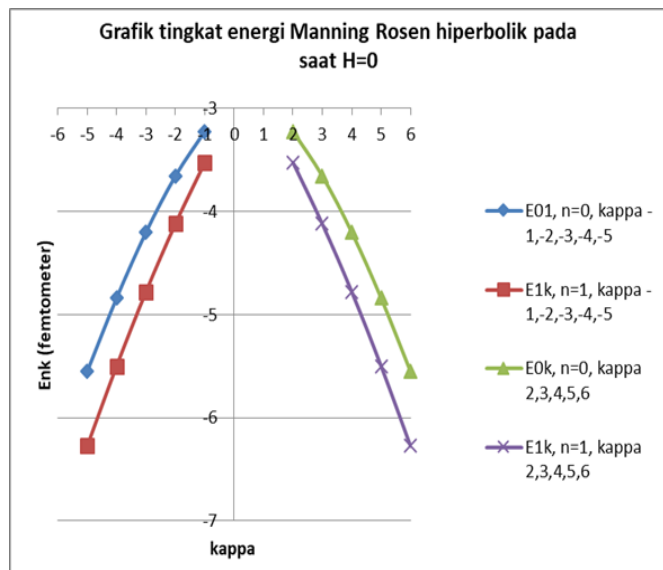
Tabel 1. Nilai energi dengan variasi κ, H dan n untuk kasus Pseudospin simetri dengan $M = 3fm^{-1}$, $C_{ps} = 5fm^{-1}$, $v = 0,1fm^{-1}$, $\mu = 0,01fm^{-1}$, $c = 1 fm$

l	n	κ	State	$E_{nk}H_1 = 0 (fm^{-1})$	$E_{nk}H_2 = 0.5 (fm^{-1})$	\bar{l}	n	κ	State	$E_{nk}H_1 = 0 (fm^{-1})$	$E_{nk}H_2 = 0.5 (fm^{-1})$
1	0	-1	$0p_{3/2}$	-3,22107	-2,92612	1	0	2	$0s_{1/2}$	-3,22107	-3,25971
2	0	-2	$0d_{5/2}$	-3,65556	-3,42416	2	0	3	$0d_{3/2}$	-3,65556	-3,70532
3	0	-3	$0f_{7/2}$	-4,20143	-3,91543	3	0	4	$0f_{5/2}$	-4,20143	-4,26152
4	0	-4	$0g_{9/2}$	-4,84071	-4,51077	4	0	5	$0g_{7/2}$	-4,84071	-4,90894
5	0	-5	$0h_{11/2}$	-5,55249	-5,1887	5	0	6	$0h_{9/2}$	-5,55249	-5,62696
1	1	-1	$1p_{3/2}$	-3,52381	-2,96834	1	1	2	$1s_{1/2}$	-3,52381	-3,58283
2	1	-2	$1d_{5/2}$	-4,12027	-3,81717	2	1	3	$1p_{3/2}$	-4,12027	-4,1829
3	1	-3	$1f_{7/2}$	-4,77828	-4,44053	3	1	4	$1d_{5/2}$	-4,77828	-4,84783
4	1	-4	$1g_{9/2}$	-5,50086	-5,13227	4	1	5	$1f_{7/2}$	-5,50086	-5,57618
5	1	-6	$1h_{11/2}$	-6,27542	-5,88242	5	1	6	$1g_{9/2}$	-6,27542	-6,35527

Dari Tabel 1 dapat dilihat grafik hubungan antara nilai energi terhadap n dengan variasi nilai $\kappa < 0$ dan $\kappa > 0$ pada saat $H = 0$ dan $H > 0$.



Gambar 1b. Grafik tingkat energi dengan variasi κ pada saat $H = 0,5$ dan n tertentu



Gambar 1a. Grafik hubungan energi variasi κ tanpa potensial Tensor $H=0$ dengan n tertentu

Tabel 1, Gambar 1a, dan Gambar 1b menunjukkan nilai energi relativistik yang diperoleh dari Persamaan (32). Pada saat ($H = 0$) didapatkan nilai energi relativistik untuk $\kappa < 0 = \kappa > 0$, sebaliknya pada saat ($H = 0,5$) nilai energi relativistik untuk $\kappa < 0 \neq \kappa > 0$ ketika n tertentu, pada peristiwa tersebut terjadi proses degenerasi energi. Pada saat nilai $\kappa < 0$ dengan $H = 0,5$ nilai energinya mengalami peningkatan sebesar $0,29 fm^{-1}$ dari nilai energi semula pada saat sebelum ditambahkan nilai H atau $H = 0$, kasus inilah yang dinamakan proses degenerasi energi. Sedangkan pada $\kappa > 0$ nilai energinya menurun dengan diberikannya harga $H = 0,5$ sebesar $0,04 fm^{-1}$, $0,05 fm^{-1}$, $0,06 fm^{-1}$ dan seterusnya pada saat n tertentu. Kasus pseudospin simetri memberikan perubahan energy yang semakin meningkat untuk nilai $\kappa < 0$ dengan $H > 0$. Besarnya nilai κ menentukan kapasitas gangguan dari potensial Manning Rosen Hiperbolik, dalam hal ini semakin bertambahnya nilai κ dari potensial Manning Rosen Hiperbolik untuk nilai n tertentu akan menghasilkan nilai energi yang besar pada saat inilah terjadi gangguan yang semakin besar yang menyebabkan partikel membutuhkan energi yang lebih tinggi untuk tetap berada pada kulit tersebut.

Secara umum, tingkat energi suatu atom bersifat diskrit dengan harga energi yang dipengaruhi oleh harga bilangan kuantum utama (n). Bilangan kuantum utama ini juga menunjukkan kulit atom, sehingga nilai energi yang diperoleh menunjukkan tingkat energi elektron yang ada pada setiap kulit atom. Energi pada setiap kulit atom mengalami peningkatan dengan semakin bertambahnya kulit atom.

Selain menggunakan variasi κ nilai energi dapat diperoleh dengan memvariasikan parameter pengganggu v dan parameter pengganggu μ , dimana kedua parameter pengganggu dapat langsung

dibandingkan dengan variasi nilai n (bilangan kuantum utama). Namun pada pembahasan ini peneliti hanya membatasi perhitungan energi dengan menggunakan variasi k dan parameter pengganggu v saja dengan nilai yang lain tetap. Data perhitungan dari nilai parameter pengganggu yang dibandingkan dengan variasi n diperoleh dari Persamaan (32) dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2,

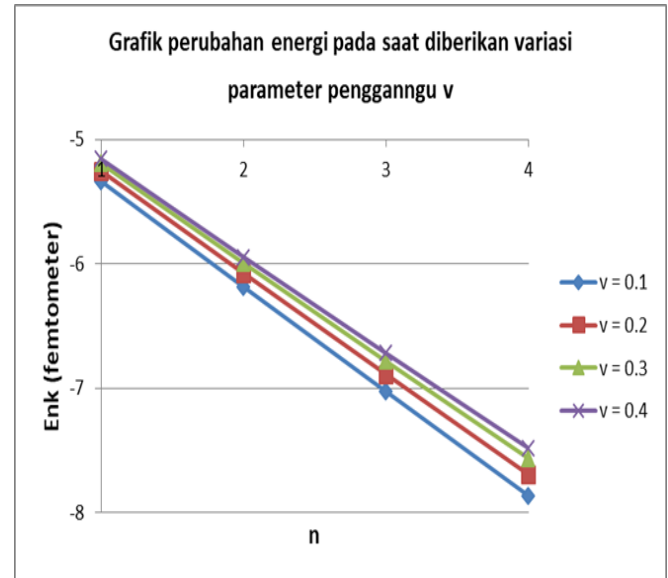
Tabel 2. Nilai perubahan energi dengan variasi parameter pengganggu v

n	v	μ	κ		C_{ps}	M	H	c	$E_{nk} (fm^{-1})$
			$\kappa < 0$	$\kappa > 0$					
1	0,1	0,01	-1	2	5	3	0	1	-5,33548
2	0,1	0,01	-1	2	5	3	0	1	-6,18471
3	0,1	0,01	-1	2	5	3	0	1	-7,02635
4	0,1	0,01	-1	2	5	3	0	1	-7,86357
1	0,2	0,01	-1	2	5	3	0	1	-5,25225
2	0,2	0,01	-1	2	5	3	0	1	-6,07419
3	0,2	0,01	-1	2	5	3	0	1	-6,88684
4	0,2	0,01	-1	2	5	3	0	1	-7,69304
1	0,3	0,01	-1	2	5	3	0	1	-5,19236
2	0,3	0,01	-1	2	5	3	0	1	-5,99339
3	0,3	0,01	-1	2	5	3	0	1	-6,78295
4	0,3	0,01	-1	2	5	3	0	1	-7,56322
1	0,4	0,01	-1	2	5	3	0	1	-5,15624
2	0,4	0,01	-1	2	5	3	0	1	-5,94409
3	0,4	0,01	-1	2	5	3	0	1	-6,71862
4	0,4	0,01	-1	2	5	3	0	1	-7,48134

Tabel 2 menunjukkan perubahan energi dengan variasi n dan parameter pengganggu v . Penggunaan variasi pada nilai parameter pengganggu v dari potensial Manning Rosen Hiperbolik yang digunakan bertujuan untuk menyelidiki pengaruh yang ditimbulkan terhadap perubahan energi.

Dari hasil yang didapatkan bahwa semakin besar pengganggu v yang diberikan akan menghasilkan nilai energi yang semakin besar (berkebalikan dengan kasus spin simetri) yang mana seharusnya apabila ditambahkan nilai pengganggu untuk n tertentu akan menyebabkan penurunan nilai energi. Peneliti memilih rentang nilai $0,1 fm^{-1}$ untuk meningkatkan nilai pengganggunya agar didapatkan perubahan energi yang jelas pada hasil visualisasi grafiknya. Pada kasus Pseudospin simetri nilai energi yang diperoleh harus bernilai negatif maka digunakan fungsi lower pada Persamaan Dirac.

Dari Tabel 2 dapat dibuat grafik perubahan nilai energi terhadap perubahan nilai n dan nilai parameter pengganggu v .



Gambar 2. Grafik perubahan nilai energi terhadap perubahan nilai n dengan variasi nilai pengganggu v .

Gambar 2 menunjukkan grafik hubungan antara perubahan nilai n dan energi dengan memvariasikan nilai pengganggu v . Dari hasil gambar diatas terlihat bahwa perubahan nilai energi semakin menurun jika nilai n dinaikkan, sedangkan perubahan nilai energi akan meningkat apabila nilai pengganggu v dinaikkan (khusus pada kasus pseudospin simetri yang mana nilainya harus negatif). Garis biru menunjukkan nilai energi yang didapatkan pada saat nilai $v = 0,1$ paling rendah, dibandingkan nilai energi yang ditunjukkan pada garis merah ($v = 0,2$), hijau ($v = 0,3$), dan ungu ($v = 0,4$). Garis ungu menunjukkan energi yang dihasilkan paling tinggi. Faktor pengganggu v disini berperan dalam mengganggu periode getaran pada suatu atom.

Dari Gambar 1a, Gambar 1b, dan Gambar 2 terlihat bahwa perubahan nilai energi yang dihasilkan semuanya bernilai negatif, hal ini sesuai dengan kasus Pseudospin simetri dengan menggunakan persamaan Dirac yang menghasilkan nilai energi yang selalu negatif. Energi yang bernilai negatif tersebut menunjukkan bahwa untuk persamaan Dirac yang digunakan adalah tingkat energi *lower* (komponen bawah spinor Dirac).

Persamaan fungsi gelombang radial untuk potensial Manning Rosen Hiperbolik plus potensial Tensor tipe Coulomb pada kasus Pseudospin simetri dapat ditentukan dengan melakukan substitusi Persamaan (23a), (30), (31), (13), (14), dan (16) sebagai berikut,

$$w^{(-\beta, -\alpha)} = (1 + s^2)^{\sqrt{(\kappa+H-1)(\kappa+H)+v(v-1)(M-E_{nk}+C_{ps})+\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}}$$

$$e^{-\left(\frac{-2\mu(M-E_{nk}+C_{ps})}{\sqrt{(\kappa+H-1)(\kappa+H)+v(v-1)(M-E_{nk}+C_{ps})+\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}}\right) \tan^{-1}(s)} \quad (33)$$

$$R_n^{(p, q')}(x) = D_n^{(-\beta, -\alpha)} = \frac{1}{(1 + s^2)^{\sqrt{(\kappa+H-1)(\kappa+H)+v(v-1)(M-E_{nk}+C_{ps})+\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}}}$$

$$e^{-\left(\frac{-2\mu(M-E_{nk}+C_{ps})}{\sqrt{(\kappa+H-1)(\kappa+H)+v(v-1)(M-E_{nk}+C_{ps})+\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}}\right) \tan^{-1}(s)}$$

$$\frac{d^n}{ds^n} \left\{ (1 + s^2)^{\sqrt{(\kappa+H-1)(\kappa+H)+v(v-1)(M-E_{nk}+C_{ps})+\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}+n} e^{-\left(\frac{-2\mu(M-E_{nk}+C_{ps})}{\sqrt{(\kappa+H-1)(\kappa+H)+v(v-1)(M-E_{nk}+C_{ps})+\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}}\right) \tan^{-1}(s)} \right\} \quad (34)$$

Dari Persamaan (33), (34), dan (23a) maka diperoleh solusi persamaan fungsi gelombang radial pada keadaan Pseudospin simetri,

$$G_{nk}(f(x)) = (1 + s^2)^{\frac{\sqrt{(\kappa+H-1)(\kappa+H)+v(v-1)(M-E_{nk}+C_{ps})+\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}}{2}}$$

$$e^{-\left(\frac{-2\mu(M-E_{nk}+C_{ps})}{\sqrt{(\kappa+H-1)(\kappa+H)+v(v-1)(M-E_{nk}+C_{ps})+\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}}\right) \tan^{-1}(s)} R_n^{(-\beta, -\alpha)}(s) \quad (35)$$

Dengan menggunakan aturan trigonometrik-hiperbolik untuk menyelesaikan eksponensial pada penyelesaian fungsi gelombang pada Persamaan (35),

$$e^{-\frac{\alpha}{2} \tan^{-1}(-i \coth(cr))} = e^{-\frac{\alpha}{2} \tan^{-1}(-i) \tan^{-1}(\coth(cr))}$$

$$e^{-\frac{\alpha}{2}(-i) \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\coth(cr))}{1-\coth(cr)}} = e^{\frac{i\alpha}{4} \ln \frac{(1+\coth(cr))}{1-\coth(cr)}} = \left(\frac{1+\coth(cr)}{1-\coth(cr)}\right)^{\frac{i\alpha}{4}} \quad (36)$$

Persamaan (36) disubstitusikan ke dalam Persamaan (35) maka diperoleh solusi persamaan fungsi gelombang radial tingkat ke-n yaitu,

$$G_{nk}(r) = (1 - \coth(cr))^{\frac{\beta-i\alpha}{2}} (1 + \coth(cr))^{\frac{\beta+i\alpha}{2}} R_n^{(-\beta, -\alpha)}(s) \quad (37)$$

Beberapa penyelesaian dari Persamaan (34) dengan menggunakan derajat polinomial yang berbeda adalah,

$$\mathcal{R}^{(-\beta, -\alpha)} = \frac{1}{(1+s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}} \frac{d^0}{ds^0} ((1 + s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}) = 1$$

$$G_{0k}(r) = (1 - \coth(cr))^{\frac{\beta-i\alpha}{2}} (1 + \coth(cr))^{\frac{\beta+i\alpha}{2}} \quad (38)$$

Persamaan (38) merupakan persamaan fungsi gelombang tingkat dasar

$$\mathcal{R}_1^{(-\beta, -\alpha)} = \frac{1}{(1+s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}} \frac{d^1}{ds^1} ((1 + s^2)^{\beta+1} e^{-\alpha \tan^{-1}(s)})$$

$$= (\beta + 1) 2s(1 + s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} - \frac{(1+s^2)^{\beta+1} \alpha e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}}{(1+s^2)^\beta}$$

$$= 2s(\beta + 1) - \alpha$$

$$G_{1k}(r) = (1 - \coth(cr))^{\frac{\beta-i\alpha}{2}} (1 + \coth(cr))^{\frac{\beta+i\alpha}{2}} 2s(\beta + 1) - \alpha \quad (39)$$

Persamaan (39) merupakan persamaan fungsi gelombang untuk tingkat pertama

$$\mathcal{R}_2^{(-\beta, -\alpha)} = \frac{1}{(1+s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}} \frac{d^2}{ds^2} ((1 + s^2)^{\beta+2} e^{-\alpha \tan^{-1}(s)})$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}} \frac{d}{ds} \left((\beta + 2) \cdot 2s(1 + s^2)^{\beta+1} e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} - (1 + s^2)^{\beta+2} \alpha e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} \frac{1}{(1+s^2)} \right)$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}} \frac{d}{ds} [(\beta + 2) 2s - \alpha] ((1 + s^2)^{\beta+1} e^{-\alpha \tan^{-1}(s)})$$

$$= [(\beta + 2) \cdot 2] (1 + s^2)^{\beta+1} e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} + [(\beta + 2) 2s - \alpha] \{(\beta + 1) 2s(1 + s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} - \alpha(1 + s^2)^{\beta+1}\}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}} \frac{d}{ds} = \{[(\beta + 2) \cdot 2] (1 + s^2)^{\beta+1} e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} + [(\beta + 2) 2s - \alpha] e^{-\alpha \tan^{-1}(s)} (1 + s^2)^\beta [(\beta + 1) 2s - \alpha]\}$$

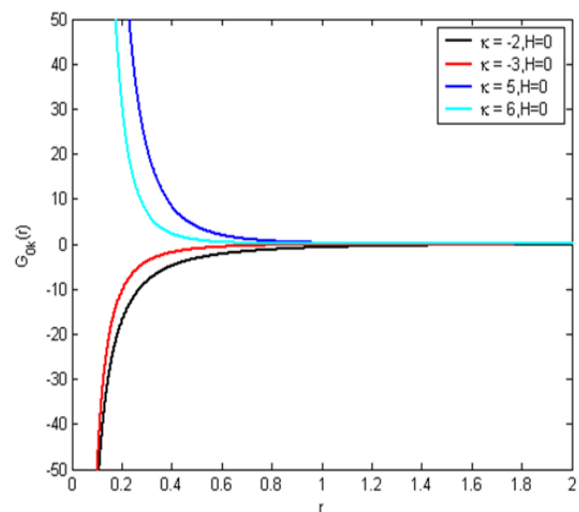
$$\mathcal{R}_2^{(-\beta, -\alpha)} = \{(\beta + 2) \cdot 2(1 + s^2) + [(\beta + 2) 2s - \alpha] [(\beta + 1) 2s - \alpha]\} (1 + s^2)^\beta e^{-\alpha \tan^{-1}(s)}$$

$$\mathcal{R}_2^{(-\beta, -\alpha)} = 2(\beta + 2)(2\beta + 3)s^2 - 2\alpha(2\beta + 3)s + \alpha^2 + 2\beta + 4$$

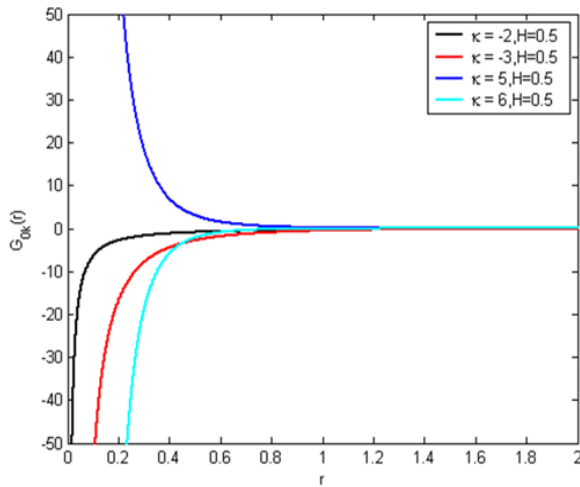
$$G_{2k}(r) = (1 - \coth(cr))^{\frac{\beta-i\alpha}{2}} (1 + \coth(cr))^{\frac{\beta+i\alpha}{2}} \{2(\beta + 2)(2\beta + 3)s^2 - 2\alpha(2\beta + 3)s + \alpha^2 + 2\beta + 4\} \quad (40)$$

Persamaan (40) merupakan persamaan fungsi gelombang tingkat kedua.

Fungsi gelombang untuk potensial Manning Rosen Hiperbolik plus potensial tensor tipe Coulomb untuk kasus Pseudospin simetri pada keadaan dasar dan keadaan pertama ditunjukkan pada Gambar 3 dan Gambar 4. Grafik yang diperoleh diplot berdasarkan Persamaan (39) untuk fungsi gelombang tingkat dasar dan Persamaan (40) untuk fungsi gelombang tingkat pertama, yang mana masing-masing diberikan nilai $H = 0$ dan $H = 0,5$, guna untuk mengetahui perbedaan yang terjadi antara kedua grafik tersebut.



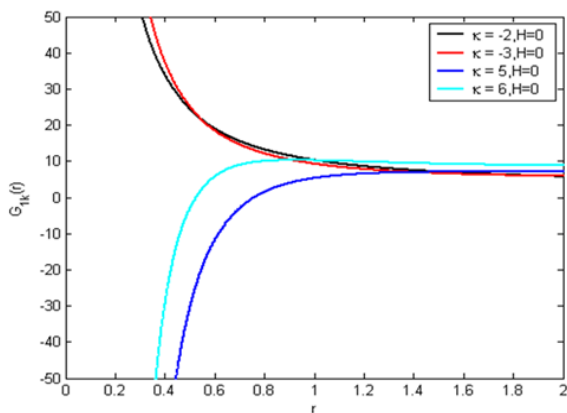
Gambar 3a. Grafik fungsi gelombang radial potensial Manning Rosen Hiperbolik keadan dasar untuk kasus Pseudospin dengan H=0



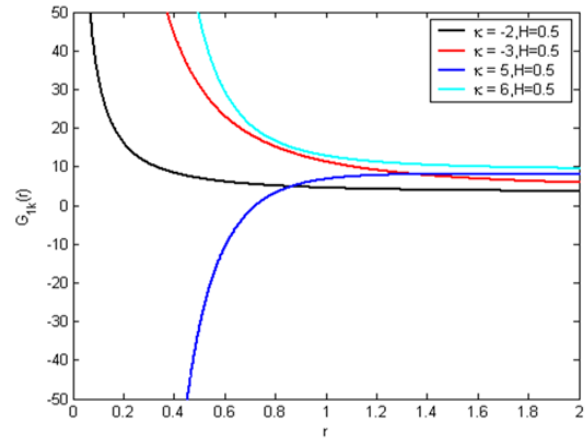
Gambar 3b. Grafik fungsi gelombang radial potensial Manning Rosen Hiperbolik keadaan dasar untuk kasus Pseudospin dengan $H=0,5$.

Pada Gambar 3a dan 3b diatas menunjukkan bahwa grafik fungsi gelombang potensial Manning Rosen Hiperbolik untuk kasus Pseudospin simetri saat $H = 0$ dengan $H > 0$ ternyata memberikan perbedaan hasil kemunculan fungsi gelombang yang didapatkan. Pada gambar grafik 3a dengan $H = 0$ kemunculan fungsi gelombang untuk $\kappa = -2$ dan $\kappa = -3$ muncul dari bawah (bernilai negatif) yang mana gerakan partikel spinnya berlawanan arah dengan jarum jam, namun setelah ditambahkan dengan $H > 0$ arah kemunculan fungsi gelombang $\kappa = 6$ berpindah dari arah bawah (bernilai negatif). Peristiwa tersebut terjadi karena ditambahkan nilai $H > 0$, pengaruh yang ditimbulkan selain arah kemunculan fungsi gelombang juga menimbulkan arah pergerakan spin pada partikel dipercepat kearah radial.

Gambar 4a dan 4b memperlihatkan fungsi gelombang keadaan pertama saat $H = 0$ dan $H > 0$ untuk kasus Pseudospin simetri.



Gambar 4.a. Grafik fungsi gelombang radial potensial Manning Rosen Hiperbolik keadaan pertama untuk kasus Pseudospin dengan $H=0$.



Gambar 4b. Grafik fungsi gelombang radial potensial Manning Rosen Hiperbolik keadaan pertama untuk kasus Pseudospin dengan $H=0,5$.

Gambar grafik 4a dan 4b diatas menunjukkan fungsi gelombang potensial Manning Rosen Hiperbolik pada saat $H = 0$ dan $H > 0$. Dimana muncul perbedaan pada fungsi gelombang tersebut berupa arah kemunculan fungsi gelombang pada saat nilai κ bervariasi. Pada Gambar 4a dengan $H = 0$ fungsi gelombang yang dihasilkan pada $\kappa = 5$ dan $\kappa = 6$ muncul dari bawah (bernilai negatif), tapi setelah ditambahkan nilai $H > 0$ arah kemunculan fungsi gelombang $\kappa = 6$ muncul dari atas (bernilai positif) searah jarum jam. Pengaruh pemberian nilai $H > 0$ menyebabkan arah munculnya fungsi gelombang pada masing- masing nilai κ yang bervariasi ada yang fungsi gelombangnya muncul dari atas (bernilai positif) dan dari bawah (bernilai negatif), dengan pergerakan partikel dipercepat kearah radial.

Fungsi variabel κ disini memberikan pengaruh besar terhadap perubahan fungsi gelombang radial. Pada persamaan umum fungsi gelombang potensial Manning Rosen Hiperbolik pada Persamaan (37) nilai α dan β didalam persamaannya sama- sama mengandung variabel bilangan kuantum spin orbital (κ). Variabel bilangan kuantum spin orbital (κ) dipengaruhi oleh nilai n, v dan μ . Nilai κ bernilai positif dan negatif karena κ tersebut berkaitan dengan bilangan spin orbital yang mana nilainya \pm bilangan bulat. Apabila variabel κ diperbesar maka nilai α dan β ikut membesar, fungsi gelombang yang dihasilkan juga berubah sesuai dengan energi yang dihasilkan dari penambahan nilai κ tersebut.

Setelah menghitung fungsi gelombang radial pada komponen bawah Dirac spinor (*lower*) pada potensial Manning Rosen Hiperbolik dilanjutkan dengan menghitung fungsi gelombang *upper* pada Dirac spinor yang dapat ditentukan dengan menggunakan Persamaan (4a) dan (38), Kesimpulan

Dari hasil pengujian menunjukkan: 1) adanya pengaruh pencampuran *Potassium Bitartrate* dan *Sodium Bicarbonate* terhadap tegangan listrik yang dihasilkan. Diperoleh grafik tegangan yang eksponensial pada bahan tersebut dan tegangan puncak sebesar 0,28 V; 2) Rekayasa piezoelektrik ini mampu mengisi kapasitor ketika digetarkan dan menghasilkan tegangan kapasitor sekitar 0,0221 V selama 5 menit pengisian.

$$F_{0k} = \frac{\left(\frac{d}{dr} \frac{\kappa}{r} + U(r)\right)}{(M - E_{nk} + C_{ps})} \cdot G_{0k}(r)$$

$$F_{0k} = \left\{ \frac{\left(\left(\frac{\beta - i\alpha}{2} \right)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} (1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} - 1 \right) (c \cdot \text{csch}^2 cr) (1 + \coth cr)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}}}{\left((1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} \left(\frac{\beta + i\alpha}{2} \right)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}} (1 + \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} - 1 \right) (-c \cdot \text{csch}^2 cr)} \right\} \frac{c(\kappa - H)}{\sinh cr}$$

$$F_{0k} = \left\{ \frac{\left(\frac{(1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} (1 + \coth cr)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}}}{\left(c \cdot \text{csch}^2 cr \left[\frac{\left(\frac{\beta - i\alpha}{2} \right) (1 + \coth cr) - \left(\frac{\beta + i\alpha}{2} \right) (1 - \coth cr)}{(1 - \coth^2 cr)} \right] \right)} \right)}{(M - E_{nk} + C_{ps})} \right\} \frac{c(\kappa - H)}{\sinh cr}$$

$$F_{0k} = \left\{ \frac{\left(\frac{(1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} (1 + \coth cr)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}}}{\left(\left(\frac{c \cdot \text{csch}^2 cr}{-c \cdot \text{csch}^2 cr} \left[\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \coth cr - \frac{i\alpha}{4} - \frac{i\alpha}{4} \coth cr \right) - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} \coth cr + \frac{i\alpha}{4} - \frac{i\alpha}{4} \coth cr \right) \right] \right)} \right)}{(M - E_{nk} + C_{ps})} \right\} \frac{c(\kappa - H)}{\sinh cr}$$

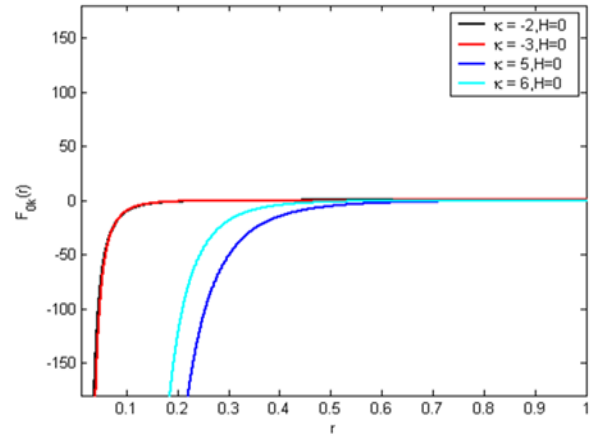
$$F_{0k} = \left\{ \frac{\left(\frac{(1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} (1 + \coth cr)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}}}{\left(-c \left[\left(\beta \coth cr - \frac{2i\alpha}{4} \right) \right] \right)} \right)}{(M - E_{nk} + C_{ps})} \right\} \frac{c(\kappa - H)}{\sinh cr}$$

$$F_{0k} = \left\{ \frac{\left(\frac{(1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} (1 + \coth cr)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}}}{\left((1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} (1 + \coth cr)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}} \left[(-c \beta \coth cr + \frac{2i\alpha}{4}) \right] \right)} \right)}{(M - E_{nk} + C_{ps})} \right\} \frac{c(\kappa - H)}{\sinh cr}$$

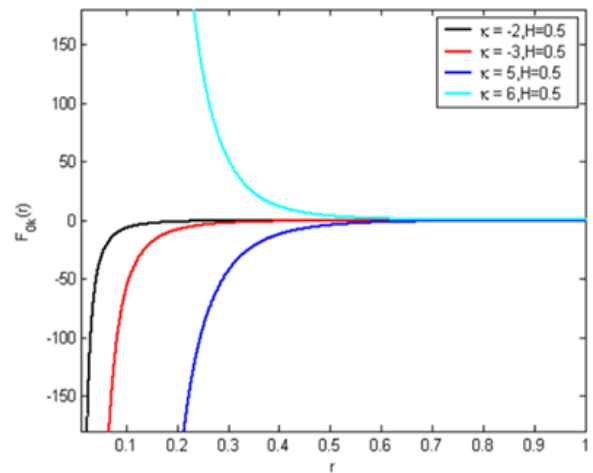
$$F_{0k} = \left\{ \frac{\left(\frac{(1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} (1 + \coth cr)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}}}{\left((1 - \coth cr)^{\frac{\beta - i\alpha}{4}} (1 + \coth cr)^{\frac{\beta + i\alpha}{4}} \left[\frac{(-c \beta \cosh cr - c(\kappa - H) + i\alpha)}{2} \right] \right)} \right)}{(M - E_{nk} + C_{ps})} \right\} \quad (41)$$

Persamaan (41) digunakan untuk menghitung fungsi gelombang tingkat dasar komponen *upper* pada komponen Dirac spinor pada kasus Pseudospin simetri dimana fungsi gelombang kompoen *lowernya* untuk tingkat dasar sudah didapatkan pada Persamaan (41).

Hasil perhitungan Persamaan (41) dapat divisualisasikan dalam bentuk gambar fungsi gelombang Manning Rosen Hiperbolik komponen *upper* pada Dirac spinor, dimana F_{0k} menggunakan variasi nilai $\kappa < 0$ dan $\kappa > 0$ yang dipadukan dengan $c = 1 \text{ fm}$ untuk kasus Pseudospin simetri dengan $H = 0$ pada gambar 5 dan dengan $H = 0,5$ pada Gambar 6 di bawah ini.



Gambar 5. Grafik fungsi gelombang *upper* keadaan dasar potensial Manning Rosen Hiperbolik kasus Pseudospin simetri pada saat $H=0$



Gambar 6. Grafik fungsi gelombang *upper* keadaan dasar potensial Manning Rosen Hiperbolik kasus Pseudospin simetri pada saat $H=0,5$.

Gambar 5 dan 6 menunjukkan fungsi gelombang potensial Manning Rosen Hiperbolik komponen *upper* (F_{0k}) keadaan dasar pada saat $H = 0$ dan $H = 0,5$. Gambar 4.12 menunjukkan arah munculnya fungsi gelombang pada semua nilai kappa dari arah bawah (negatif), dimana pada saat ini pergerakan spin pada partikelnya berlawanan arah jarum jam. Sedangkan pada Gambar 6 mengalami perubahan arah muncul fungsi gelombang dari $\kappa = 6$ yang semula dari bawah menjadi bernilai positif (fungsi gelombangnya) perputaran partikelnya searah jarum jam.

Hasil penelitian yang didapatkan dalam perhitungan energy dan gelombang relativistic sesuai dengan penelitian yang diajukan oleh (Hidayatulloh, 2017) dengan hasil sebagai berikut Fungsi gelombang relativistik diperoleh dari fungsi bobot dan dinyatakan dalam bentuk polynomial Romanovski. Karena hasil

energinya tidak bisa diselesaikan secara analitik, maka energy relativistik diperoleh dengan metode numerik menggunakan Matlab 2011. Begitu juga dengan hasil penelitian yang dilakukan oleh (Okon et al., 2021) yang menyebutkan bahwa parameter layar dalam potensial mempengaruhi solusi simetri spin dan energi non relativistik dengan cara yang sama tetapi dalam bentuk yang direvisi untuk persamaan energi simetri pseudospin.

Kesimpulan

Solusi persamaan Dirac untuk potensial Manning Rosen Hyperbolik dengan potensial tensor tipe Coulomb menggunakan polinomial Romanovski pada kasus Pseudospin simetri. Dari perhitungan spektrum energi menggunakan software Matlab 2011, pada kasus Pseudospin simetri nilai energi selalu negatif. Apabila ($H=0$) untuk $\kappa < 0 = \kappa > 0$, sedangkan untuk $H > 0$ untuk $\kappa < 0 \neq \kappa > 0$ peristiwa inilah yang dinamakan degenerasi energy. Nilai energi pada potensial Manning Rosen Hyperbolik plus Tensor tipe Coulomb untuk kasus Pseudo spin simetri semakin kecil dengan bertambahnya nilai parameter pengganggu dari potensial tersebut. Jika r semakin besar, maka partikel akan bergeser menjauhi inti disertakan dengan membesarnya amplitudo. Hal inilah menunjukkan bahwa partikel akan lebih mudah ditemukan pada kulit terluar.

Daftar Pustaka

- Alvarez-Castillo, D. E. (2008). Exactly solvable potentials and Romanovski polynomials in quantum mechanics. *ArXiv Preprint ArXiv:0808.1642*.
- Cari, C., Deta, U. A., & Werdiningsih, I. S. (2013). Solution of Dirac Equations for Cotangent Potential with Coulomb-type Tensor Interaction for Spin and Pseudospin Symmetries Using Romanovski Polynomials. *Makara Journal of Science*, 17(3), 4.
- Chabab, M., Lahbas, A., & Oulne, M. (2012). Analytic L-state solutions of the Klein–Gordon equation for Q-deformed Woods–Saxon plus generalized ring shape potential for the two cases of equal and different mixed vector and scalar potentials. *International Journal of Modern Physics E*, 21(10), 1250087.
- Falaye, B. J., & Ikhdair, S. M. (2013). Relativistic symmetries with the trigonometric Pöschl–teller potential plus Coulomb-like tensor interaction. *Chinese Physics B*, 22(6), 60305.
- Greiner, W. (2011). *Quantum mechanics: an introduction*. Springer Science & Business Media.
- Hidayatulloh, A. (2017). Fungsi Gelombang Spin Simetri Untuk Potensial Scarf Hiperbolik Plus Coulomb Like Tensor Dengan Menggunakan Metode Polynomial Romanovski. *JURNAL SANGKAREANG MATARAM*, 3(1), 51–55.
- Okon, I. B., Omugbe, E., Antia, A. D., Onate, C. A., Akpabio, L. E., & Osafire, O. E. (2021). Spin and pseudospin solutions to Dirac equation and its thermodynamic properties using hyperbolic Hulthen plus hyperbolic exponential inversely quadratic potential. *Scientific Reports*, 11(1), 892.
- Tjia, M. O., & Sutjahja, I. M. (2012). Orbital Kuantum (Pengantar Teori dan Contoh Aplikasinya). *Karya Putra Darwati*. Bandung.
- Weber, H. (2007). Connections between Romanovski and other polynomials. *Open Mathematics*, 5(3), 581–595.
- Yanuarief, C. (2012). *Analisis Energi Dan Fungsi Gelombang Potensial Non Sentral Rosen Morse Plus Hulthen, Rosen Morse, Dan Coulomb Menggunakan Polinomial Romanovski*. UNS (Sebelas Maret University).