Kappa Journal

e-ISSN 2450-2590
Halaman 13-20

SOLUSI PERSAMAAN DIRAC DENGAN SPIN SIMETRI UNTUK POTENSIAL SCARF II HIPERBOLIK TERDEFORMASI-Q *PLUS* TENSOR TIPE COULOMB DENGAN MENGGUNAKAN METODE NIKIFOROV UVAROV

Siti Nurul Fitriani[1),]Suparmi[2)]
[1)] IAI Hamzanwadi NW Pancor
[2)] Universitas Sebelas Maret Surakarta
E-mail : sitinurulfitriani91@gmail.com

ABSTRAK

Persamaan Dirac untuk potensial Sentral Scarf II hiperbolik terdeformasi-q dengan Potensial tensor tipe Coulomb diselesaikan secara analitik menggunakan metode Nikiforov Uvarov (NU). Penyelesaian persamaan Dirac dengan metode NU dilakukan dengan mereduksi persamaan diferensial orde dua menjadi persamaan diferensial tipe Hipergeometri dengan substitusi variabel dan fungsi gelombang yang sesuai. Energi relativistik sistem dihitung menggunakan software Matlab R2011b dan fungsi gelombang untuk Spin Dirac komponen atas dan bawah dinyatakan dalam bentuk fungsi Jacobi. Penelitian ini dikhususkan untuk kasus spin simetri yang nilai energinya selalu positif.

Kata Kunci: *Persamaan Dirac, Spin Simetri, potensial Scar II hiperbolik terdeformasi-q, tensor tipe Coulomb, metode Nikiforov Uvarov*

A. PENDAHULUAN

Gerakan partikel dalam benda padat dinyatakan sebagai gelombang yang mempunyai kerapatan energi yang tidak nol pada daerah tak terhingga[1]. Sistem gerak partikel akibat pengaruh relativistik menyebabkan partikel tersebut berpindah dalam medan potensial[2]. Untuk menyelesaikan persamaan gerak dari partikel tersebut dapat digunakan persamaan Schrödinger, Dirac, dan Klein-Gordon yang pada dasarnya secara langsung dapat diturunkan dari Lagrangian klasik[3].

Pada fisika partikel, persamaan Dirac merupakan persamaan gelombang relativistic yang diformulasikan oleh ahli ilmu fisika Inggris Paul Dirac pada tahun 1928. Persamaan Dirac selalu mendiskripsikan partikel dinamik spin-1/2 pada mekanika kuantum. Efek relativistic menjadi sangat penting untuk partikel bergerak pada medan potensial[4]. Dan pada pengaruh relativistic, dapat dirumuskan dengan persamaan Klein-Gordon atau persamaan Dirac. Beberapa jenis potensial seperti potensial Coulomb, osilator harmonik tiga dimensi bagian radial, Morse, Rosen Morse, Manning Rosen, kelompok Pöschl-Teller, kelompok Gendenstein/ Scarf/Poschl-Teller umum, Symmetrical Top, Eckart, Kepler dalam sistem hypersphere, merupakan kelompok potensial yang *shape invariance* yaitu energi potensial yang persamaan fungsinya tidak cukup sederhana[5]. Namun, beberapa potensial telah diselesaikan solusi persamaan gelombang dan tingkat energinya pada persamaan Dirac dengan beberapa metode antara lain: metode Hipergeometri, metode Nikiforov–Uvarov(NU)[6-10], metode polynomial Romanovski[11-13].

Persamaan Dirac digunakan untuk mendeskripsikan partikel yang berspin ½ atau kelipatannya dalam mekanika kuantum. Pada persamaan Dirac, untuk kasus spin simetri berlaku bahwa selisih antara potensial vektor V(r) dan potensial skalar S(r) adalah konstan dan jumlahnya sama dengan potensial yang mempengaruhi sistem sedangkan untuk kasus spseudospin simetri berlaku jumlah antara potensial vektor V(r) dan r potensial skala S(r) adalah konstan dan selisihnya sama dengan potensial yang mempengaruhi sistem. Diasumsikan bahawa potensial skalar sama dengan potensial vektor agar dapat diperoleh penyelesaian analitisnya.

Persamaan Dirac untuk potensial Poschl-Teller terdeformasi-q plus potensial tensor tipe Coulomb diselesaikan pada kasus spin simetri dengan metode Nikiforov-Uvarov (NU). Penulis lebih memilih menggunakan metode NU sebagai solusi penyelesaiannya karena metode NU dapat menyelesaikan semua jenis potensial, meskipun lebih rumit dibandingkan dengan metode polinomial Romanovski dan hipergeometri. Sampai saat ini hanya sedikit peneliti menggunakan metode NU untuk memecahkan persamaan Schrödinger dan Dirac untuk potensial terdeformasi-q khususnya pada kasus spin simetri.

Persamaan Dirac untuk Spin Simetri

Persamaan Dirac untuk potensial vector V (r) dan Skalar (r) dituliskan sebagai:

$$\left[c\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta\left(Mc^2+S(\vec{r})\right)-i\beta\vec{\alpha}.\hat{r}U(r)\right]\Psi(\vec{r})=E-V(\vec{r}) \quad (1)$$

dengan

$$\vec{p}=-i\hbar\nabla,$$

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma & 0\end{pmatrix}\ dan\ \beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}i\hbar\nabla \quad (2)$$

dengan σ adalah matrik tiga dimensi Pauli, I adalah matriks identitas 2×2. Jika nilai $\hbar=c=1$, dan spin Dirac dituliskan sebagai

$$\psi(\vec{r})=\begin{pmatrix}\varphi(\vec{r})\\ \chi(\vec{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{F_{nk}(r)}{r}Y_{jm}^{l}(\theta,\emptyset)\\ i\frac{G_{nk}(r)}{r}Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta,\emptyset)\end{pmatrix} \quad (3)$$

dengan $\varphi(\vec{r})$ adalah spin Dirac arah atas dan $\chi(\vec{r})$ adalah spin Dirac arah bawah. $Y_{jm}^{l}(\theta,\emptyset)$ adalah spin bola harmonik dan $Y_{jm}^{\bar{l}}(\theta,\emptyset)$ adalah pseudospin simetri bola harmonik.

Dengan memasukkan persamaan (2) dan (3), ke persamaan (1) didapatkan

$$\left\{\frac{d}{dr}+\frac{K}{r}-U(r)\right\}F_{nk}(r)=\left(M+E_{nk}-\Delta(r)\right)(M-E_{nk}+\textstyle\sum(r))F_{nk}(r) \quad (4)$$

$$\left\{\frac{d}{dr}-\frac{K}{r}-U(r)\right\}G_{nk}(r)=\left(M-E_{nk}+\Delta(r)\right)(M-E_{nk}+\textstyle\sum(r))G_{nk}(r) \quad (5)$$

$F_{nk}(r)$adalah komponen arah atas dan $G_{nk}(r)$ adalah komponen arah bawah, sehingga didapatkan persamaan spin simetri dan pseudopin simetri yang masing-masing dituliskan sebagai berikut untuk spin simetri

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{K(K+1)}{r^2}+\frac{2k}{r}U(r)-\frac{dU(r)}{dr}-U^2(r)\right\}F_{nk}(r)=\left(M+E_{nk}+\Delta(r)\right)(M-E_{nk}+\textstyle\sum(r))F_{nk}(r) \quad (6)$$

Dan

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{K(K-1)}{r^2}+\frac{2k}{r}U(r)-\frac{dU(r)}{dr}+U^2(r)\right\}G_{nk}(r)=\left(M+E_{nk}+\Delta(r)\right)(M-E_{nk}+\sum(r))G_{nk}(r) \quad (7)$$

dengan $\kappa(\kappa+1)=l(l+1)$ adalah komponen spin arah atas dan $\kappa(\kappa-1)=l(l-1)$ adalah komponen spin arah bawah. Spin simetri memiliki $\Delta(r)=c$ dan $\sum(r)$ merupakan potensial yang mempengaruhi sistem, sedangkan pseudospin simetri memiliki $\sum(r)=c$ dan $\Delta(r)$ merupakan potensial yang mempengaruhi sistem.

B. METODE

Persamaan diferensial hipergeometri yang diselesaikan dengan menggunakan metode NU memiliki bentuk[9]

$$\frac{\partial^2\Psi(s)}{\partial s^2}+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\frac{\partial\Psi(s)}{\partial s}+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\partial^2}\Psi(s)=0 \quad (8)$$

dengan $\sigma(s)$ dan $\tilde{\sigma}(s)$ merupakan polinomial yang biasanya berderajat dua dan $\tilde{\tau}(s)$ merupakan polinomial berderajat satu. Dengan menggunakan metode pemisahan variabel penyelesaian persamaan (1) dimisalkan sebagai

$$\Psi=\phi(s)y(s) \quad (9)$$

Dengan memasukkan persamaan (9) ke dalam persamaan (8) diperoleh persamaan tipe hipergeometri

$$\sigma\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\tau\frac{\partial y}{\partial s}+\lambda y=0 \quad (10)$$

dan fungsi gelombang bagian pertama dinyatakan sebagai

$$\frac{\phi'}{\phi}=\frac{\pi}{\sigma} \quad (11)$$

dan juga diperoleh persamaan-persamaan yang akan digunakan untuk menentukan spektrum energi dan fungsi gelombang bagian kedua *yn?*

$$\pi=\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}+k\sigma} \quad (12)$$

$$\lambda=k+\pi' \quad (13)$$

Adapun nilai k pada persamaan (13) diperoleh dari kondisi bahwa di bawah akar pada persamaan (12) merupakan polinomial berderajat dua dan merupakan bentuk kuadrat sempurna sehingga diskriminan dari polinomial berderajat dua adalah nol. Eigenilai dari persamaan (13) dinyatakan sebagai

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \quad (14)$$

Dengan
$n=0,1,2,...$
$$\tau=\tilde{\tau}+2\pi \quad (15)$$

agar system memenuhi kondisi *bound-state*, maka dipilih nilai τ dan/atau π sedemikian hingga $\tau'<0$.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Dirac untuk Potensial Scarf II Hiperbolik Terdeformasi-q Plus Tensor tipe Coulomb Menggunakan Spin Simetri.
Dengan menggunakan persamaan (6), dan memasukkan potensial yang memperngaruhinya

$$\Sigma = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{b^2+a(a+1)}{sinh_q^2\alpha r} - \frac{2b\left(a+\frac{1}{2}\right)cosh\ \alpha r}{sinh_q^2\alpha r}\right) \quad (16)$$

Dengan U yang merupakan tensor tipe Coulomb

$$U(r) = -\frac{H}{r}, H = \frac{Z_a Z_b e^2}{4\pi\varepsilon_0} \quad (17)$$

maka didapatkan

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(\kappa+H)(\kappa+H+1)}{r^2}\right]F_{nk}(r) = \left(M+E_{nk}-\Delta(r)\right)(M-E_{nk})F_{nk}(r) + \frac{(M+E_{nk}-C_s)\left(b^2+a(a+1)\right)}{sinh_q^2\alpha r}F_{nk}(r) - \frac{(M+E_{nk}-C_s)\left(2b\left(a+\frac{1}{2}\right)cos_q\alpha r\right)}{sinh_q^2\alpha r}F_{nk}(r) \quad (18)$$

dengan

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\alpha^2}{sinh_q^2\alpha r} \quad (19)$$

dengan memasukkan nilai $\frac{1}{r^2}$ maka persamaan (18) menjadi

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{sin_q^2\alpha r}\left\{\alpha^2(\kappa+H)(\kappa+H+1) - \alpha^2(M+E_{nk}-C_s)\left(b^2+a(a+1)\right) + \alpha^2(M+E_{nk}-C_s)\left(2b\left(a+\frac{1}{2}\right)cos_q\alpha r\right)\right\}\right]F_{nk}(r) = \alpha^2(M+E_{nk}-C_s)(M-E_{nk})F_{nk}(r) \quad (20)$$

Dengan melakukan permisalan pada persamaan (20), dengan

$$(\kappa+H)(\kappa+H+1) + (M+E_{nk}-C_s)\left(b^2+a(a+1)\right) = A$$

$$(M+E_{nk}-C_s)(M-E_{nk}) = E'$$

$$(M+E_{nk}-C_s)\left(b\left(a+\frac{1}{2}\right)\right) = B$$

Maka persamaan (20) menjadi

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\alpha^2 A}{sin_q^2\alpha r} + \frac{2\alpha^2 B cos_q\alpha r}{sin_q^2\alpha r}\right]F_{nk}(r) = \alpha^2 E' F_{nk}(r) \quad (21)$$

Solusi Energi Persamaan Dirac dengan Menggunakan Spin Simetri untuk Potensial Scarf II Hiperbolik Terdeformasi-q dengan Metode Nikiforov-Uvarov (NU)

Dengan memisalkan variabel baru

$cos_q\alpha r = s$

maka persamaan (21) menjadi

$$\left[(s^2-q)\frac{d^2}{ds^2}+s\frac{d}{ds}-\left\{\frac{A}{(s^2-q)}+\frac{E'}{(s^2-q)}(s^2-q)-\frac{Bs}{(s^2-q)}\right\}\right]F_{nk}=0 \quad (22)$$

Dari persamaan (22) diperoleh parameter-parameter NU yaitu:

$$\bar{\tau}=s$$
$$\sigma=s^2-q$$
$$\bar{\sigma}=-\{E's^2-2Bs+A-E'q\}$$

Dengan memasukkan nilai parameter-parameter tersebut ke Persamaan (22) diperoleh nilai nilai π

$$\pi=\left(\frac{s}{2}\right)\pm\sqrt{\left(E'+k+\frac{1}{4}\right)s^2-2Bs+A-(E'+k)q} \quad (23)$$

Selanjutnya dinentukan nilai k dari persamaan (23), dan nilai k dapat ditentukan jika diskriminan dalam akar sama dengan nol (kuadrat sempurna).

$D=0 \quad b^2-4ac=0$

Dengan memisalkan

$$E'+\frac{1}{4}=v^2$$
$$A+\frac{1}{4}q=t^2$$
$$u^2=(B)^2$$

Sehingga diperoleh nilai k yaitu

$$k_1=\frac{t^2+\sqrt{t^4-4qu^2}}{2q}-\left(E'+\frac{1}{4}\right) \quad (24)$$
$$k_2=\frac{t^2-\sqrt{t^4-4qu^2}}{2q}-\left(E'+\frac{1}{4}\right) \quad (25)$$

Setelah menentukan k_1 dan k_2, ditentukan nilai τ dan $\boldsymbol{\lambda}$ dengan syarat $\boldsymbol{\tau}'<0$ agar sistem memenuhi kondisi *ground_state*. Selanjutnya menghitung λ_n sesuai persamaan (14) untuk mencari nilai eigenvalue dari persamaan hipergeometri dari metode Nikiforov-Uvarov. Adapun parameter-parameter tersebut adalah:

$$\tau=-2s\left(\sqrt{\frac{t^2-\sqrt{t^4-4qu^2}}{2q}}-1\right)+\frac{2B}{\sqrt{\frac{t^2-\sqrt{t^4-4qu^2}}{2q}}} \quad (25)$$

$$\lambda=\frac{t^2-\sqrt{t^4-4qu^2}}{2q}-\sqrt{\frac{t^2-\sqrt{t^4-4qu^2}}{2q}}-v^2+\frac{1}{2} \quad (26)$$

$$\lambda_n=2n\sqrt{\frac{t^2-\sqrt{t^4-4qu^2}}{2q}}-n-n^2 \quad (27)$$

Setelah diperoleh parameter λ dan λ_n, eigenvalue dari persamaan hipergeometri dari metode Nikirorov-Uvarov dapat diperoleh dengan menyamakan λ dan λ_n. Dengan demikian, diperoleh energi untuk potensial Scarf II hiperbolik terdeformasi sebagai berikut:

$$E'=-\left(\frac{1}{2q}\sqrt{t^2+2u}-\frac{1}{2q}\sqrt{t^2-2qu}+n+\frac{1}{2}\right)^2 \quad (28)$$

Hasil energi potensial Scarf II hiperbolik terdeformasi-q *plus* tensor tipe Coulomb yang diperoleh untuk spin simetri dapat dilihat pada Tabel 1.

Dari hasil energi pada Tabel 1, bisa digambarkan grafik energinya seperti pada gambar 1 dan gambar 2. Gambar 1 dan 2 menunjukkan energi potensial Scarf II hiperbolik terdeformasi-q *plus* tensor tipe Coulomb dengan variasi kappa dan kulit atom *n*. Variabel yang dibuat konstant adalah *b*, *M*, *Cs*, *H* dan *q*. kita bisa melihat bagaimana variasi kappa bisa mempengaruhi

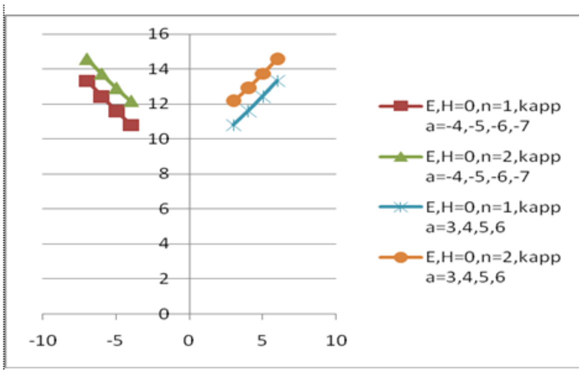
e-ISSN 2450-2590
Halaman 13-20

perubahan energi. Semakin kecil nilai kappa maka energinya semakin besar sebesar 1 fm^{-1}, hal itu terjadi pada saat konstanta Coulomb bernilai nol, artinya faktor pengganggu *H* tidak memberikan pengaruh pada perubahan energi baik pada saat kappa<0 maupun saat kappa>0. Nilai pada keadaan kappa<0 dan kappa>0 memiliki nilai energi yang sama saat H=0, pada keadaan ini terjadi degenerasi energi karena memiliki nilai energi yang sama walaupun memiliki keadaan yang berbeda. Dimana degenerasi pada umumnya terjadi pada sistem dengan dua atau lebih bilangan kuantum. Namun saat konstanta *Coulomb* bernilai 0.5 nilai energinya semakin besar begitu juga saat nilai *n* semakin besar, maka perubahan enegi semakin besar pula.

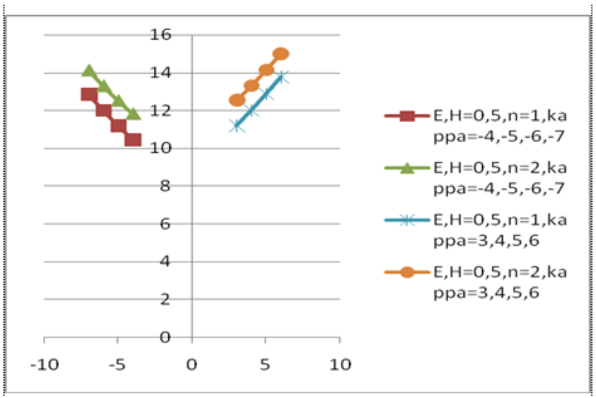
TABEL I

Nilai energi dengan variasi κ dengan a=0.1fm^{-1}, M=3fm^{-1}, Cs=5fm^{-1} dan b=2fm^{-1}q=1fm^{-1}

n	*l*	*K*< 0	*J* = *l*+½	*Enk* > 0 *H*= 0	*Enk* > 0 *H*=0,5
0	0	-4	$0s_{1/2}$	9,339	9,003
0	1	-5	$0p_{3/2}$	10,245	9,815
0	2	-6	$0d_{5/2}$	11,137	10,687
0	3	-7	$0f_{7/2}$	12,057	11,594
1	0	-4	$s_{1/2}$	10,795	10,432
1	1	-5	$p_{3/2}$	11,586	11,182
1	2	-6	$d_{5/2}$	12,434	12,004
1	3	-7	$f_{7/2}$	13,319	12,873
n	*l*	*K*>0	*J* = *l*-1/2	*Enk*>0 *H*=0	*Enk*>0 , *H*=0.5
0	0	3	0s1/2	9,399	9,815
0	1	4	0p3/2	10,245	10,687
0	2	5	0d5/2	11,137	11,594
0	3	6	0f7/2	12,057	12,525
1	0	3	s1/2	10,795	11,182
1	1	4	p3/2	11,586	12,004
1	2	5	d5/2	12,434	12,873
1	3	6	f7/2	13,319	13,773



Gambar. 1 Grafik energi untuk spin simetri untuk n=0,1 dengan H=0



Gambar. 2 Grafik energi untuk spin simetri untuk n=0,1 dengan H=0,5

D. KESIMPULAN.

Persamaan Dirac untuk modifikasi potensial Scarf II hiperbolik terdeformasi-q dengan tensor tipe Coulomb telah diselesaikan dengan menggunakan metode Nikiforov-Uvarov. Penyelesaian persamaan Dirac dengan metode NU dilakukan dengan mereduksi persamaan diferensial orde dua menjadi persamaan diferensial tipe Hipergeometri dengan substitusi variabel tertentu. Dengan memanipulasi penjabaran yang berbasis pada bentuk persamaan diferensial fungsi hipergeometri diperoleh beberapa persamaan yang berbentuk formula yang siap pakai sehingga diperoleh spektrum energi yang bernilai positif khusus pada kondisi spin simetri. Karena hasil energinya tidak bisa diselesaikan secara analitik, maka energi relativistik diperoleh dengan metode numerik menggunakan *software* Matlab R2011b.

E. UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terimakasih disampaikan kepada Rektor IAI Hamzanwadi Selong yang telah memberikan ijin pelaksanaan penelitian dan telah membantu baik dalam bentuk fasilitas, dana ataupun peralatan bagi keberhasilan dan kelancaran kegiatan penelitian yang kami lakukan

F. DAFTAR PUSTAKA

[1] D. Saadatmand and K. Javidany. (2011) Collective Coordinate Analysis of Inhomogeneous Nonlinear Klein-Gordon Field Theory. Department of physics, Ferdowsi university of Mashhad 91775-1437 Mashaad Iran.*arXiv:*1109.4922v1*[nlin.PS]*.

[2,4] Xian-Quan, H.U., Guang, L.U.O., Zhi-Mhin, W.U., Lian-Bin, N.I.U. Ana Yan, M.A. 2010. Solving Dirac Equation Alt New Ring-Shaped Non-Spherical Harmonic Oscillator Potential. *Journal of Communication Theoritical Physics*, Vol. 53, No. 2, pp. 242-246.

[3] Gerhard Grössing. Derivation of the Schrödinger Equation abd the Klein-Gordon Equation from First Principles. Austrian Institute for Nonlinear Studies Parkgasse 9, A-1030 Vienna, Austria.

[5] Cari. 2013. *Mekanika Kuantum-penyelesaian potensial non-sentral dengan Supersimetri, Hypergeometry, nikiforov-Uvarov, dan Polynomial Romanovski*. UNS Press: Surakarta.

[6] A.Suparmi, C, Cari, H Yuliani. Energy Spectra Wave Function Analysis of q-Deformed Modified Poschl-Teller and Hyperbolic Scarf II Potentials Using NU Method and a Mapping Method. *Advances in Physics Theories and Aplications*, Vol. 16, 2013, ISSN 2224-719X.

[7] M. Eshghi, H. Mehraban. Eigen Spectra for Manning-Rosen potential including Coulomb-like tensor interaction. *International Journal of the Physical Sciences*, Vol. 6(29), 16 November 2011, pp. 6643-6652.

[8] Ikot, A.N., H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, S. Zarrinkamer. Relativistic Pseudospin and Spin Symmetries of the Energy-Dependent Yukawa Potential Including a Coulomb-like Tensor Interaction. *Ukraina Journal Physics*, Vol. 58, No. 10, 2013.

[9] M. Eshghi, H. Mehraban. Eigen Spectra in the Dirac-Hyperbolyc Problem with Tensor Coupling. *Chinese Journal Of Physics*, Vol. 50, No. 4, 9 Agustus 2011.

[10] Mona Azizi, Nasrin Salehi, Ali Akbar Rajabi, Exact Solution of the Dirac Equation for the Yukawa Potential with Scalar and Vector Potentials and Tensor Interaction, *ISRN High Energy Physics*, Vol. 2013 (2013), Article ID 310392, 4 November 2013.

[11] A.Suparmi,C, Cari, at el, Approximate Solution of Schrodinger Equation for Modified Posch-Teller plus Trigonometric Rosen-Morse Non-Central Potentials in Term of Finite Romanovski polynomial, *IOSR Journal of Applied Physics*, vol.2,no.2, 2012,pp. 43-51.

[12] Cari, Suparmi, at al, Solution of Dirac Equtaion for Cotangent Potential with Coulomb-type Tensor Interaction for Spin and Pseudospin Symmetry Using Romanovski polynomial, *makara journal of science* Vol.17, No.3, 2013. hal 93-102

[13] A.suparmi,and C,Cari, Solution of Dirac Equation for q-Deformed Eckart Potential with Yukawa-type Tensor Interaction for Spin and Pseudospin Symmetry Using Romanovski Polynomial, *Atom Indonesia*, vol.39, no.3,2013, hal 112-123.